

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО- МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
за освітньою програмою «Інформаційні управляючі системи та технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Дослідження операцій: Побудова економіко-математичних моделей: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. Г. Жданова, В. Д. Попенко, М. О. Сперкач. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,48 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 79 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 31.01.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки (протокол № 5 від
23.12.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Жданова Олена Григорівна, канд. техн. наук, доц.
Попенко Володимир Дмитрович, канд. техн. наук
Сперкач Майя Олегівна, канд. техн. наук*

Відповідальний
редактор *Писаренко А. В., канд. техн. наук, доцент*

Рецензент *Клименко І. А., д.т.н., доцент, професор кафедри обчислювальної
техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Практикум присвячений одному з основних етапів дослідження операцій - складанню економіко-математичних моделей проблемних ситуацій. Розглянуті питання, які повинні бути вирішені в процесі побудови математичної моделі. Посібник містить опис багатьох поширених на практиці проблемних ситуацій, що приводять до оптимізаційних моделей різних класів задач математичного програмування. На багатьох прикладах показано особливості побудови оптимізаційних моделей. Посібник містить завдання для самостійної роботи, які розбиті на категорії з огляду на їх складність.

Посібник призначений для студентів спеціальності «Інформаційні системи та технології» та для тих, хто вивчає навчальну дисципліну «Дослідження операцій».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	6
1.1 Етапи побудови економічних моделей	6
1.2 Задачі до практичних занять	8
1.3 Задачі домашньої роботи	13
2 ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	18
2.1 Задача про фарби (складність 1)	18
2.2 Задача про букети (складність 1)	20
2.3 Задача про виготовлення іграшок (складність 1)	21
2.4 Задача про автомобілі (складність 1)	23
2.5 Задача про Древню Грецію (виробництво) (складність 1)	24
2.7 Задача про військо (складність 1,1).	26
2.8 Задача про передачу від батьків (складність 1)	27
2.9 Задача про вежу (складність 1)	28
2.10 Задача про підробіток (складність 1).	30
2.11 Задача про коваля та зброю (складність 1)	31
2.12 Задача про продаж напоїв (складність 1,2)	32
2.13 Задача про виготовлення сумок (складність 1,2)	33
2.14 Задача про коктейль (складність 1,4)	34
2.15 Задача про верстати (складність 1,5)	36
2.16 Задача про пластилін (складність 1,5)	39
2.17 Задача про виробництво (складність 2)	41
3 ЗАДАЧІ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	43
3.1 Задачі категорії А	43
3.2 Задачі категорії Б	51
3.3 Задачі категорії В	64
3.4 Завдання до контрольної роботи	76
ВИСНОВКИ	78
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	79

ВСТУП

Метою дослідження операцій є визначення найкращого (оптимального) способу дій при вирішенні задач організаційного управління в умовах наявності обмежень, які мають техніко-економічний характер. Використання терміну «дослідження операцій» завжди має на увазі використання математичних методів для моделювання систем та аналізу їх характеристик. Математичні моделі та методи займають центральне місце в дослідженні операцій.

Робота, що виконується в процесі операційного дослідження, складається з наступних етапів:

- 1) ідентифікація проблеми;
- 2) побудова моделі;
- 3) вибір математичного методу;
- 4) розв'язання поставленої задачі;
- 5) перевірка адекватності моделі
- 6) реалізація результатів на практиці.

Ідентифікація проблеми. На цьому етапі змістовно формуються задача і цілі дослідження, визначаються властиві досліджуваній системі вимоги, умови і обмеження.

Побудова моделі. Тут з урахуванням особливостей постановки задачі будується (або обирається) модель, найбільш відповідна для адекватного опису досліджуваної системи. При побудові моделі повинні бути встановлені вирази цільової функції і обмежень у вигляді функцій від керованих параметрів.

Вибір математичного методу. У дослідженні операцій немає загального методу рішення усіх математичних моделей, які зустрічаються на практиці. Тобто, який метод буде обраний, визначається типом і складністю досліджуваної математичної моделі. Якщо розроблена модель належить відомому класу моделей дослідження операцій, то користуються відповідними математичними методами. Деякі математичні моделі можуть бути такими складними, що їх неможливо вирішити ніякими доступними точними методами оптимізації. В цьому випадку використовують наближені або евристичні методи.

Розв'язання поставленої задачі. Практично усі методи дослідження операцій не дозволяють отримати рішення в замкнутій формі. Навпаки, вони породжують ітераційні обчислювальні алгоритми. Це означає, що задача вирішується послідовно,

коли на кожному кроці (ітерації) отримують розв'язки, що поступово сходяться до оптимального. Ітераційна природа алгоритмів зазвичай приводить до об'ємних однотипних обчислень. Саме тому ці алгоритми розробляються для реалізації за допомогою комп'ютерів. На даному етапі окрім знаходження оптимального розв'язку також з'ясовується, як змінюватиметься цей розв'язок при зміні умовно-постійних параметрів системи. Цю частину дослідження називають аналізом моделі на чутливість або пост-оптимальним аналізом.

Перевірка адекватності моделі. Модель можна вважати адекватною, якщо вона здатна достатньо надійно передбачати поведінку системи. Загальний метод перевірки адекватності системи полягає в зіставленні результатів, що будуть отримані, з характеристиками системи, які за тих же початкових умов мали місце у минулому.

Дослідження операцій як засіб вирішення задач організаційного, є одночасно і наукою і мистецтвом. Науковість підходу до формування управлінських рішень слідує з того, що при вирішенні проблем, що виникають, використовуються математичні моделі та методи. Дослідження операцій можна розглядати і як мистецтво, оскільки успішне виконання усіх етапів дослідження - від його початку до реалізації рішення, отриманого за допомогою розробленої математичної моделі - багато в чому визначається творчими здібностями та інтуїцією дослідника. Особливо це стосується перших двох етапів дослідження операцій – ідентифікація проблеми та побудова моделі. Цей практикум присвячений питанням побудови економіко-математичних моделей проблемних ситуацій, що виникають на практиці.

1 ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Етапи побудови економічних моделей

Розв'язання практичних задач пов'язане з трьома основними етапами дослідження: складання економіко-математичної моделі, визначення оптимального розв'язку математичними методами та аналіз отриманого розв'язку.

Процес побудови математичної моделі складається з трьох етапів, на яких необхідно надати відповіді на такі три питання:

Етап I. Для визначення яких величин повинна бути побудована модель? Іншими словами, як ідентифікувати змінні (шукані величини) даної задачі?

Етап II. Які обмеження повинні бути накладені на змінні, щоб виконувалися умови, характерні для системи, що моделюється?

Етап III. У чому полягає мета, для досягнення якої з усіх припустимих значень змінних треба вибрати ті, які будуть відповідати оптимальному розв'язку задачі?

Далі треба побудувати саму математичну модель, пам'ятаючи такі речі.

I. Складання математичної моделі починається з вибору деякої кількості **змінних** величин, завданням числових значень яких однозначно визначається один з варіантів процесу. Ці величини звичайно позначаються літерами x , y та ін. з одним або кількома індексами.

II. Мета дослідження характеризується ознакою (**критерієм**), за якою будуть порівнюватися різноманітні варіанти розв'язку та може вибиратися найкращий з них (**оптимальний розв'язок**). За такий критерій в різних економічних ситуаціях може обиратися найбільший прибуток, найбільша товарна продукція, найменша нормативна вартість обробки, найменші витрати виробництва, максимальне використання обладнання, досягнення певного результату за мінімальний час, найменші відходи виробництва та ін. Кожний з вказаних критеріїв має достатні економічні основи й інколи буває важко віддати перевагу тільки одному з них. У кожній конкретній задачі може бути вибраний той з показників, який у даному випадку є найбільш суттєвим, тому що універсального

показника оцінки результатів господарської діяльності підприємства не існує. Вибраний показник характеризується *цільовою функцією* z (ЦФ).

Засоби визначення критеріїв можуть бути найрізноманітнішими. Так, наприклад, розв'язуючи задачу на мінімізацію транспортних витрат, можна оцінювати їх у тонно-кілометрах, у грошовому еквіваленті, з урахуванням існуючих тарифів на перевезення або без урахування тарифної шкали і т.п.

III. Обмеження. Постановка задач лінійного програмування передбачає наявність обмежених ресурсів, якими необхідно розпорядитися якнайкраще. Тому дуже важливо визначити, які ресурси для проблеми, що вивчається, є вирішальними і в той же час лімітуючими, який запас цих ресурсів. Крім того, повинні бути визначені витрати кожного ресурсу при тому чи іншому варіанті розв'язку. До ресурсів можуть належати: обладнання, запаси сировини, електроенергії, палива та ін., трудові ресурси, засівна площа, запаси кормів.

Крім того, в систему обмежень задачі можуть входити різні додаткові умови, визначені початковою постановкою задачі (умова комплектності, асортиментні співвідношення, планові завдання по випуску продукції та ін.).

У багатьох практичних питаннях доводиться зустрічатися з альтернативними розв'язками та необхідністю вибору найкращого з них. Однак далеко не в усіх випадках при розв'язанні подібних проблем можуть бути використані математичні методи. Необхідною умовою для цього є кількісне вираження початкових даних та залежностей, які характеризують дану проблему, а також існування кількісної оцінки, яка дозволяє порівняти різні альтернативні розв'язки. Це означає, що такі характеристики результатів процесу, як “краще” чи “гірше”, повинні бути замінені математичними оцінками “більше” або “менше” з встановленням числової шкали для порівняння цих характеристик. Відзначимо, що остання вимога більш жорстка, ніж просто умова існування числової оцінки. Так, наприклад, якість знань може бути оцінена за п'ятибальною системою за допомогою числових характеристик (оцінок) “2”, “3”, “4” та “5”. Однак для такої системи оцінок немає числової шкали, за допомогою якої їх можна порівняти між собою. Наприклад, три двійки, очевидно, не еквівалентні двом трійкам, хоча $3 \cdot 2 = 6$ та $2 \cdot 3 = 6$ та ін.

Кількісне вираження усіх даних задачі та залежностей між ними дозволяє у кінцевому підсумку скласти математичну модель задачі.

Отже, після визначення змінних кількісно виражаються наявні ресурси, їх витрати та інші початкові дані задачі. Потім у вигляді системи математичних рівнянь або нерівностей виражаються усі зв'язки, які характеризують даний процес. Нарешті, згідно з обраним критерієм оптимальності виражають кількісно цей критерій для різних варіантів розв'язків, тобто подають його у вигляді математичної функції від змінних задачі.

Складений таким чином кількісний опис проблеми являє собою математичну модель. У процесі подальшого аналізу моделі вона може коректуватися, до неї можуть вводитися додаткові змінні або обмеження та, навпаки, деякі змінні або рівняння виключаються. Складанням математичної моделі закінчується перший етап дослідження. На другому етапі розв'язання задачі здійснюється за допомогою різних обчислювальних методів.

Результат, який отримується при дослідженні моделі, повинен бути насамперед економічно інтерпретований та всебічно проаналізований. Дуже часто при розв'язанні конкретних задач оптимальний розв'язок, знайдений математичними методами, може бути неприйнятним і потрібне деяке його коректування. Аналіз додаткових даних розрахунку дозволяє оцінити, в якому напрямку доцільно відходити від оптимального розв'язку, який результат цих відхилень, який вплив різних початкових факторів на кінцевий результат та ін. Все це і є змістом 3-го етапу дослідження.

1.2 Задачі до практичних занять

1.2.1 (6) *Задача визначення плану виробництва продукції* Фірма випускає три види виробів. У процесі виробництва використовується три технологічні операції. На рис. 1.1 показана технологічна схема виробництва виробів видів 1, 2 і 3. При виготовленні виробу 2 технологічна операція 2 не виконується, а при виготовленні виробу 3 використовуються тільки технологічні операції 1 і 3.

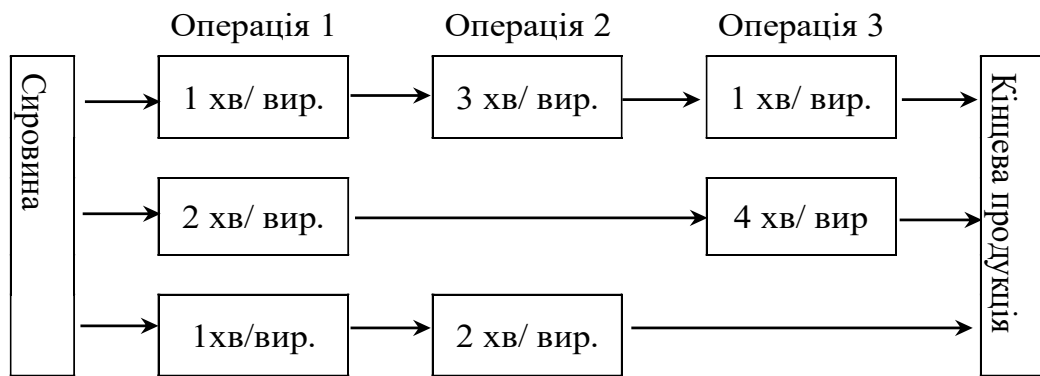


Рис. 1.1. Технологічна схема виробництва виробів видів 1, 2 і 3

У прямокутниках вказана тривалість технологічних операцій при виготовленні одного виробу кожного виду. Оскільки ці технологічні операції використовуються фірмою і для інших виробничих цілей, фонд робочого часу, протягом якого операції 1, 2 і 3 можуть бути використані для виробництва виробів, що розглядаються, обмежений такими значеннями (на добу): для першої операції – 430 хв, для другої операції – 460 хв, для третьої операції – 420 хв.

Вивчення ринку попиту показало, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1, 2 і 3 складає 3, 2 і 5 грн. відповідно.

Який найбільш вигідний добовий обсяг виробництва кожного виду продукції?

1.2.2 (31) Задача визначення асортименту продукції. Знайти оптимальний асортимент продукції 4-х видів виробів, при якому підприємство отримає максимальний прибуток. У табл. 1.1 наведені необхідні дані. Прочерки у табл. 1 витрат означають, що на цей виріб відповідні ресурси не витрачаються. В останньому рядку вказані обмеження на асортимент.

Таблиця 1.1

Дані до розрахунків

Ресурси	Обсяги ресурсів	Витрати на одиницю виробу			
		1	2	3	4
Верстати токарні	12000 (верстатогодин)	70	30	50	—
Верстати фрезерувальні	8000 (верстатогодин)	25	—	40	30

Ресурси	Обсяги ресурсів	Витрати на одиницю виробу			
		1	2	3	4
Сталь	3000 (кг)	5	7	8	4
Трудові ресурси	30000 (людиногодин)	120	50	100	130
Прибуток в од.варт. на од. виробу		10	5	8	15
Обмеження за асортиментом		не більше 50	вироби 2 і 3 повинні випускатися у відношенні 3:2		не менше 30

1.2.3 (30) Задача складення кормової суміші, або задача про дієту. Бройлерне господарство птахоферми налічує 20000 курчат, які вирощуються до 8-тижневого віку і після відповідної обробки надходять у продаж. У середньому (за 8 тижнів) витрати корму на 1 курча складають не менш як 1 фунт.

Для того, щоб до 8-го тижня курчата досягли необхідної ваги, кормовий раціон повинен задовольняти визначені вимоги щодо поживності. Цим вимогам можуть відповідати суміші різних видів кормів або інгредієнтів. В розглядуваній задачі корми складаються з трьох інгредієнтів: вапна, зерна й соєвих бобів. Вимоги до поживності раціону враховують тільки три види поживних речовин: кальцій, білок та клітковину. У табл. 1.2 наведено дані, які характеризують вміст поживних речовин у кожному з інгредієнтів та питому вартість кожного інгредієнта.

Таблиця 1.2

Дані до розрахунків

Інгредієнт	Вміст поживних речовин, фунт/фунт інгр.			Вартість, грн/фунт
	Кальцій	Білок	Клітковина	
Вапно	0.38	—	—	0.04
Зерно	0.001	0.09	0.02	0.15
Соєві боби	0.002	0.50	0.08	0.40

Суміш повинна містити:

- не менш 0.8%, але не більш 1.2% кальцію;
- не менш 22% білка;
- не більш 5% клітковини.

Який найбільш вигідний склад кормової суміші?

1.2.4 (14) Нафтопереробний завод отримує 4 напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентану. В результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: бензин *A* (2:3:5:2), бензин *B* (3:1:2:1) і бензин *C* (2:2:1:3). Вартість 1 тис. л бензину кожного сорту дорівнює 120, 100 і 150 од. вартості.

Визначити обсяги випуску продукції, за яких буде досягнута максимальна вартість всієї продукції.

1.2.5 (15) *Задача про суміш.* Виробнича компанія виробляє деякий продукт, який є сумішшю трьох інгредієнтів. Цей продукт повинен мати такі якості:

- питома вага ≤ 1.00 ;
- точка спалаху $\geq 500\text{ }^{\circ}\text{F}$;
- склад кислот $\leq 1\%$ (обсяг у);
- склад абразивних матеріалів $\leq 10\%$ (обсяг у).

Характеристики інгредієнтів представлені у табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Дані до розрахунків

Властивість	Інгредієнт 1	Інгредієнт 2	Інгредієнт 3
Питома вага	0.90	1.10	0.99
Точка спалаху, $^{\circ}\text{F}$	600	400	475
Склад кислот у % об'ємі	2	0.5	1
Склад абразивних матеріалів у % об'ємі	8	12.0	11

Якщо вартість інгредієнтів дорівнює відповідно 2, 1 і 3 грн. за галон, то якою повинна бути суміш? (При змішуванні інгредієнтів якості суміші є випуклими лінійними комбінаціями якостей компонентів).

1.2.6 (17) Механічний завод при виготовленні трьох різних деталей I, II і III використовує верстати типу 1, 2 і 3. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними способами: T_1 , T_2 і T_3 . Норма часу при обробці деталі i ($i = I, II, III$) на верстаті j ($j = 1, 2, 3$) k -м технологічним способом ($k = T_1, T_2, T_3$) складає n_{ijk} годин, а ресурси кожного з верстатів складають r_j ($j = 1, 2, 3$) верстатогодин. Прибуток від продажу кожного виду виробу складає c_i ($i = 1, 2, 3$) од. вартості.

А. Скласти план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток.

В. Вважаючи, що між кількістю деталей, що виробляються, повинно виконуватися співвідношення комплектності 1:2:1, визначити виробничу програму, яка забезпечує виготовлення максимальної кількості комплектів.

1.2.7 (24) *Задача диспетчеризації.* Мінімально необхідна кількість автобусів у i -ту годину доби дорівнює b_i , $i = 1, 2, \dots, 24$. Кожний автобус неперервно використовується на лінії протягом 6 годин. Перевищення кількості автобусів у період i порівняно з величиною b_i призводить до додаткових витрат на одну машино-годину у розмірі c_i . Сформулюйте дану задачу як задачу мінімізації загальної величини додаткових витрат.

1.2.8 (25) *Задача про розкрій або мінімізацію залишків.* Продукція паперової фірми виготовляється у вигляді паперових рулонів стандартної ширини – по 20 футів. За спеціальними замовленнями споживачів фірма поставляє рулони й інших розмірів, для чого розрізає стандартні. У табл. 1.4 наведено одне з таких замовлень.

Таблиця 1.4

Дані замовлення

Потрібна ширина, футів	Потрібна кількість рулонів, шт
5	150
7	200
9	300

Яким чином повинно бути виконане це замовлення, щоб кількість відходів (залишків) була мінімальною (усі рулони шириною 5, 7 і 9 футів, отримані понад потрібну кількість, також вважаються відходами)?

1.2.9 (26) При виготовленні виробів двох видів здійснюється послідовна обробка відповідних заготівок на двох різних верстатах. Кожний верстат може використовуватися для виробництва виробів по 8 год за добу, однак цей фонд часу можна збільшити на 4 год за рахунок понаднормових робіт. Кожна година понаднормового часу потребує додаткових витрат у розмірі 5 од. вартості. Продуктивність верстатів та прибуток, які розраховані для одного виробу, наведені у табл. 1.5. Потрібно знайти обсяги виробництва виробів кожного виду, які забезпечать отримання максимального прибутку.

Таблиця 1.5

Продуктивність верстатів та прибуток для одного виробу

Верстат	Продуктивність, виріб/год	
	Виріб 1	Виріб 2
1	5	6
2	4	8
Питомий прибуток	6	4

(Вказівка. Для урахування можливості використання понаднормових робіт ввести дві необмежені за знаком змінні y_i ($i=1,2$): якщо $y_i < 0$, то це величина недовикористаного 8-годинного фонду часу i -го верстата, якщо $y_i > 0$, то це тривалість понаднормових робіт на i -му верстаті).

1.3 Задачі домашньої роботи

1.3.1 (1) Підприємство випускає дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель виробляється на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва 1-ї лінії – 60 виробів, 2-ї лінії – 75 виробів. На радіоприймач 1-ї моделі витрачається 10 однотипних елементів, 2-ї моделі – 8 таких самих елементів. Максимальний добовий запас елементів – 800 шт. Прибуток від реалізації: 1-ї моделі – 30 грн., 2-ї моделі – 20 грн. Визначити оптимальні добові обсяги виробництва 1-ї та 2-ї моделей.

1.3.2 (2) Процес виготовлення двох видів промислових виробів полягає у послідовній обробці кожного з них на трьох верстатах. Час використання кожного з верстатів – не більше 10 годин на добу. Час обробки і прибуток від продажу кожного з виробів наведені у табл. 1.6. Знайти оптимальні обсяги виробництва виробів кожного виду.

Таблиця 1.6

Час обробки і прибуток від продажу кожного з виробів

Виріб	Час обробки одного виробу, хв			Питомий прибуток, грн
	Верстат 1	Верстат 2	Верстат 3	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

1.3.3 (3) Фірма має можливість продавати свою продукцію. Витрати на рекламу в її бюджеті обмежені величиною 1000 грн. на місяць. Кожна хвилина радіореклами обходиться у 5 грн., телереклами – у 100 грн. Фірма хотіла б використовувати радіомережу у 2 рази частіше ніж мережу телебачення. Досвід показав, що обсяг збуту, котрий забезпечує кожна хвилина телереклами, у 25 разів більше від обсягу збуту, який забезпечується 1 хвилиною радіореклами. Визначити оптимальний розподіл фінансових коштів між радіо- і телерекламою.

1.3.4 (4) Фірма виготовляє два види продукції: A і B . Обсяг реалізації продукції виду A повинен бути не менше 60% від обсягу реалізації продукції обох видів. Для виготовлення продукції видів A і B використовується одна і та ж сировина, добовий запас якої обмежений величиною 100 фунтів. Витрати сировини на одиницю продукції виду A складають 2 фунти, а на одиницю продукції виду B – 4 фунти. Ціни продукції видів A і B дорівнюють 20 і 40 грн. відповідно. Визначити оптимальний розподіл сировини для виготовлення продукції видів A та B .

1.3.5 (5) Фірма випускає ковбойські капелюхи двох фасонів. Трудомісткість виготовлення капелюха фасону 1 вдвічі вища від трудомісткості виготовлення капелюха фасону 2. Якщо б фірма випускала тільки капелюхи фасону 1, добовий обсяг виробництва міг би складати 500 капелюхів. Добовий обсяг збуту капелюхів обох фасонів обмежений діапазоном від 150 до 800 шт. Прибуток від продажу капелюха фасону 1 складає 8 грн., а фасону 2 – 5 грн.

Визначити, яку кількість капелюхів кожного фасону треба виготовляти, щоб максимізувати прибуток.

1.3.6 (39) Задача постачальника. Постачальник кулінарних виробів знає, що йому знадобляться протягом найближчих n днів свіжі серветки по r_j штук, $j=1, \dots, n$. Прання звичайно займає p днів, тобто якщо брудна серветка відправляється до пральні у день j , то вона повертається назад і може бути використана в $(j+p)$ -й день. Крім того, у пральні є термінове обслуговування при якому серветки повертаються через $q < p$ днів (p і q – цілі числа). Не маючи в наявності потрібної кількості серветок, постачальник задовольняє свої потреби, купуючи серветки по a од. вартості за штуку. Прання однієї серветки при звичайному обслуговуванні b , а при терміновому – c од. вартості. Що треба зробити постачальнику, щоб задовольнити свої потреби і мінімізувати витрати на дані n днів?

(Вказівка: Вважати, що на початку планування у постачальника немає серветок ні в наявності, ні у пральні; x_j – кількість нових серветок, куплених у день j , y_j та z_j – кількість серветок, відправлених у звичайне та термінове прання у день j , d_j – кількість брудних серветок, не відправлених у прання у день j , $j=1, \dots, n$).

1.3.7 (50) Літаки комерційної авіакомпанії здійснюють рейси між двома містами $M1$ та $M2$ в обох напрямках. Якщо базою екіпажу є місто $M1$ і екіпаж прибуває у $M2$ визначеним рейсом, то він повинен повернутися у $M1$ одним з наступних рейсів (можливо, на наступний день). Компанія прагне обрати зворотний рейс для кожного екіпажу так, щоб мінімізувати час його стоянки в аеропорту, який не є базою екіпажу (при цьому між польотами екіпажі повинні мати відпочинок не менше 1 години).

У табл. 1.7 подано розклад рейсів (у ньому вказано місцевий час міст, при цьому час у $M2$ на годину відстає від часу в $M1$, крім того, довжина польотів у напрямку $M2 - M1$ більше через вплив вітру).

Знайти *здвоєні рейси*, при яких сумарний час стоянок екіпажів в аеропортах, які не є їх базою, є мінімальним. (Іншими словами, необхідно мінімізувати сумарний час перебування у "чужому" аеропорту).

Розклад рейсів

Рейс	Виліт з $M1$	Прибуття у $M2$	Рейс	Виліт з $M2$	Прибуття у $M1$
1	07–30	09–00	2	07–00	10–00
3	08–15	09–45	4	07–45	10–45
5	14–00	15–30	6	11–00	14–00
7	17–45	19–30	8	18–00	21–00
9	19–00	20–30	10	19–30	22–30

Вказівка: Необхідно прийняти рішення двох типів:

1. Які рейси треба здвоїти? Якщо рейси є здвоєними, то один і той же екіпаж виконує ці рейси в обох напрямках: $M1 - M2$ та $M2 - M1$.

2. Де обрати базу екіпажу при заданих здвоєних рейсах? (Екіпаж повинен базуватися у тому аеропорті, для якого час стоянки між здвоєними рейсами мінімальний).

1.3.8 (16) *Задача про авіап перевезення.* Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром C та чотирма містами: $M1$, $M2$, $M3$ і $M4$ має три групи літаків. Перша група складається з 10 чотиримоторних літаків, друга – з 25 двомоторних нового зразка і третя – з 40 двомоторних старого зразка. Кількість пасажирів, які перевозяться одним літаком i -го типу за маршрутом j за один місяць, дорівнює k_{ij} , експлуатаційні витрати на один літак i -го типу на j -й лінії складають e_{ij} од. вартості на один літак. Місячна кількість пасажирів, які бажають перелетіти за кожним маршрутом, складає відповідно 40, 50, 40 і 30 тис. чол., а вартість одного квитка дорівнює 20, 15, 18 і 30 од. вартості (вартість квитка не залежить від типу літака). Розподілити літаки за маршрутами відповідно до вимог досягнення максимального прибутку.

Уточнення. Метою авіакомпанії є максимізація прибутку при використанні наявного парку літаків і не є обов'язковим задоволення усіх потреб у перельоті. Пояснити, чому в останньому випадку задача може бути нерозв'язною.

1.3.9 (27) *Задача про сплави.* Для отримання двох сплавів A і B використовуються 4 метали I, II, III та IV. Вимоги до вмісту цих металів у сплавах A і B наведені у табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Вимоги до вмісту металів

Сплав	Вимоги до вмісту металів
A	не більш як 80% металу I
	не більш як 30% металу II
	не менш як 50% металу IV
B	від 40 до 60% металу II
	не менш як 30% металу III
	не більш як 70% металу IV

Характеристики і запаси руд, з яких отримують метали I, II, III та IV, вказані в табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Характеристики і запаси руд

Руда	Максимальний запас, т	Склад, %					Вартість, грн/т
		I	II	III	IV	Інші компоненти	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Нехай вартість 1 т сплаву A дорівнює 200 грн., а 1 т сплаву B – 300 грн. Максимізувати прибуток від продажу сплавів A та B. (Вказівка: позначте через x_{ijk} кількість тонн металу i , отриманого з руди j та використаного для виготовлення сплаву k).

2 ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

2.1 Задача про фарби (складність 1)

Постановка задачі. Невелика фабрика деякої фірми виготовляє два види фарб: для внутрішніх (I) та зовнішніх (E) робіт. Продукція обох видів надходить до оптового продажу. Для виробництва фарби використовується два початкових продукти – A і B . Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 т відповідно. Витрати A і B на 1 т відповідних фарб наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Витрати A і B на 1 т відповідних фарб

Початковий продукт	Витрати початкових продуктів на тону, т		Максимальний добовий запас, т
	фарби E	фарби I	
A	1	2	6
B	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попит на фарбу E більш, ніж на 1 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т на добу.

Оптові ціни 1 т фарби дорівнюють: 3 тис. грн. для фарби E , 2 тис. грн. для фарби I .

Яка кількість фарби кожного виду повинна вироблятися фабрикою, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Побудова математичної моделі.

Змінні. В зв'язку з тим, що необхідно визначити обсяги виробництва кожної з фарб, змінними в моделі є:

- x_E – добовий обсяг виробництва фарби E , т;
- x_I – добовий обсяг виробництва фарби I , т.

Цільова функція. Оскільки вартість 1 т фарби E дорівнює 3 тис.грн., добовий прибуток від її продажу дорівнює $3x_E$ тис. грн. Аналогічно, прибуток від реалізації x_I т фарби I дорівнює $2x_I$ тис. грн. на добу. За припущенням незалежності обсягів збуту кожної з фарб загальний прибуток дорівнює сумі двох доданків – прибутку від продажу фарби E і прибутку від продажу фарби I .

Позначивши загальний прибуток (в тис. грн.) через z , можна дати таке формулювання ЦФ: визначити (допустимі) значення x_E і x_I максимізуючи величину загального прибутку: $z=3x_E + 2x_I$.

Обмеження. При розв'язанні цієї задачі повинні бути враховані обмеження на витрати початкових продуктів і попит на фарби, що виробляються. Обмеження на витрати початкових продуктів можна записати таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Витрати початкового} \\ \text{продукту для} \\ \text{виробництва обох} \\ \text{видів фарб} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Максимально} \\ \text{можливий запас} \\ \text{даного} \\ \text{початкового} \\ \text{продукту} \end{array} \right\}$$

Це приводить до таких двох обмежень:

- для продукту A : $x_E + 2x_I \leq 6$;
- для продукту B : $2x_E + x_I \leq 8$.

Обмеження на величину попиту на продукцію має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Перевищення попиту на} \\ \text{фарбу I відносно попиту на} \\ E \end{array} \right\} \leq 1 \text{ тонна / доба};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Попит на фарбу I} \end{array} \right\} \leq 2 \text{ тонни / доба}.$$

Математично ці обмеження записують таким чином:

- співвідношення величин попиту на фарби:

$$x_I - x_E \leq 1;$$

- попит на фарбу I :

$$x_I \leq 2.$$

Неявні обмеження полягають в тому, що обсяги виробництва продукції не можуть набувати від'ємних значень. Щоб запобігти отриманню таких неприпустимих розв'язків, будемо вимагати виконання умов невід'ємності змінних, тобто введемо обмеження на їх знак: $x_E, x_I \geq 0$.

Тоді математичну модель можна записати таким чином: визначити добові обсяги виробництва (x_E і x_I) фарби I і фарби E (в т), при яких досягається:

- цільова функція:

$$\max z = 3x_E + 2x_I;$$

- обмеження:

$$x_E + 2x_I \leq 6;$$

$$2x_E + x_I \leq 1;$$

$$-x_E + x_I \leq 1;$$

$$x_I \leq 2;$$

$$x_E, x_I \geq 0.$$

Ця модель є лінійною, тому що всі функції (ЦФ і обмеження), які входять до неї, – лінійні.

2.2 Задача про букети (складність 1)

Постановка задачі. Квіткова лавка виробляє букети двох видів: VIP-букети і бутоньєрки (рисунок 2.1, таблиця 2.2). Для виготовлення VIP-букета необхідно 5 троянд і одна вітка хризантеми, а для бутоньєрки – 1 троянда та 1 вітка хризантеми. Добовий запас троянд складає 21 штук. Кількість хризантем, використаних для виготовлення, має бути не меншою, ніж 15 штук. Прибуток від реалізації одного VIP-букета складає 7 ум.од., а бутоньєрки – 3 ум.од.

Визначити, які букети кожного виду необхідно використовувати, щоб максимізувати загальний прибуток.

Таблиця 2.2

Розподіл квіток по букетах

Троянди	1	5
Хризантеми	1	2
Прибуток	3	7



Рис. 2.1. Розподіл квіток по букетах

Побудова математичної моделі.

Змінні. В якості змінних позначимо кількість проданих букетів обох видів:

- x_1 – кількість VIP-букетів (в штуках);
- x_2 – кількість бутоньерок (в штуках).

Цільова функція: максимізація прибутку від продажу букетів:

$$\max z = 7x_1 + 3x_2.$$

Обмеження:

- на кількість троянд:

$$5x_1 + 1x_2 \leq 21;$$

- на кількість хризантем:

$$2x_1 + x_2 \geq 15;$$

- на невід'ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

2.3 Задача про виготовлення іграшок (складність 1)

Постановка задачі. На іграшковій фабриці виробляють 4 види іграшок (машинки, м'які іграшки, роботи, ляльки). Для виробництва іграшок

використовують чотири види сировини (метал, пластик, гума, тканина). Всі витрати на виробництво іграшок та прибуток від їх продажу наведено в таблиці 2.3.

В якій кількості фабрика повинна виробляти іграшки різних видів, щоб прибуток від реалізації був максимальний?

Таблиця 2.3

Витрати на виробництво іграшок та прибуток від їх продажу

Види матеріалів	Витрати на виробництво 1 іграшки				Загальна кількість матеріалів на складі
	Машинки 	М'які іграшки 	Роботи 	Ляльки 	
Метал	5	-	2	1	80
Пластик	3	1	3	4	160
Гума	1	1	1	2	60
Тканина	-	5	-	2	110
Ціна іграшки	6	10	9	12	

Побудова математичної моделі.

Змінні: x_i – кількість іграшок i -го виду ($i = \overline{1,4}$) (машинки, м'які іграшки, роботи, ляльки – відповідно), що виробляється на фабриці (в штуках).

Цільова функція: максимізація прибутку від реалізації:

$$\max z = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 12x_4.$$

Обмеження:

– на метал:

$$5x_1 + 2x_3 + 1x_4 \leq 80;$$

– на пластик:

$$3x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 160;$$

– на гуму:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 60;$$

– на тканину:

$$5x_2 + 2x_4 \leq 110;$$

– на невід'ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Задача про автомобілі (складність 1)

Постановка задачі. Завод Porsche у Штутгарті випускає 4 моделі авто, а саме: Boxter, 911, Cayman і Cayenne. Кожна машина послідовно проходить через три різних збиральних цехи. Час складання автомобілів по цехах та фонди робочого часу цехів наведені у таблиці 2.4.

Також відомо, що кількість зібраних Boxter-ів за день не має бути менше кількості зібраних Cayman.

Ціна одного Boxter рівна 35000 доларів, 911 – 70000 доларів, Cayman – 42000 доларів, а Cayenne – 55000 доларів. Процес збірки автомобілів зображено на рисунку 2.4.

Визначити план добової норми збирання автомобілів, щоб прибуток від продажу був максимальним.

Таблиця 2.4

Час складання автомобілів та фонди робочого часу цехів

	Час складання (у хвиликах)				Фонд робочого часу цеху (у годинах)
	Boxter	911	Cayman	Cayenne	
Цех 1	100	110	100	150	12
Цех 2	150	70	140	200	10
Цех 3	120	370	125	400	14

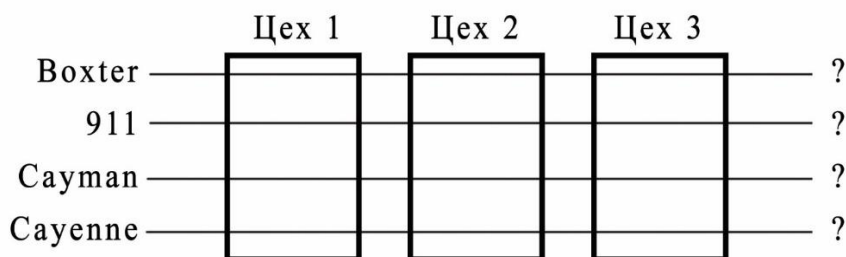


Рис. 2.2. Схема процесу збирання автомобілів

Побудова математичної моделі.

Змінні: необхідно знайти кількість автомобілів, яку можна виготовляти при заданих ресурсах:

- x_1 – кількість зібраних автомобілів Boxter (штук);

- x_2 – кількість зібраних автомобілів 911 (штук);
- x_3 – кількість зібраних автомобілів Cayman (штук);
- x_4 – кількість зібраних автомобілів Cayenne (штук).

Цільова функція: максимізація прибутку від продажу автомобілів

$$\max z = 35000x_1 + 70000x_2 + 42000x_3 + 55000x_4.$$

Обмеження. Спочатку формалізуємо обмеження на час роботи кожного з цехів. Перший цех може працювати не більше $12 \times 60 = 720$ хвилин, другий – $10 \times 60 = 600$ хвилин, а третій – $14 \times 60 = 840$ хвилин. Тоді обмеження матимуть вигляд:

$$100x_1 + 110x_2 + 100x_3 + 150x_4 \leq 720;$$

$$150x_1 + 70x_2 + 140x_3 + 200x_4 \leq 600;$$

$$120x_1 + 370x_2 + 125x_3 + 400x_4 \leq 840.$$

Оскільки, кількість зібраних Boxter-ів за день не має бути менше кількості зібраних Cayman, то:

$$x_1 \geq x_3.$$

Враховуючи фізичний зміст змінних, вони мають бути невід'ємними та цілочисельними:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z.$$

2.5 Задача про Древню Грецію (виробництво) (складність 1)

Постановка задачі. В майстерні, при виготовленні бюстів Аполлона і Афродіти, використовують 4 технологічні процеси: відливка, шліфування, фарбування, лакування. Дані про технологічні норми виготовлення бюстів наведені в рисунку 2.3. В розпорядженні майстерні 120 годин на процес відливки, 150 годин на шліфування, 80 на фарбування та 100 на лакування. На фарбування бюсту Аполлона витрачається 5 літрів фарби, на бюст Афродіти – 4 літри. Всього майстерня має 25 літрів фарби. Прибуток від реалізації бюсту Аполлона складає 6 тис. грн. і від бюсту Афродіти – 16 тис. грн.

Побудуйте математичну модель задачі, використовуючи в якості показника ефективності прибуток і враховуючи, що час роботи, затрачений на шліфування повинен бути використаний повністю.

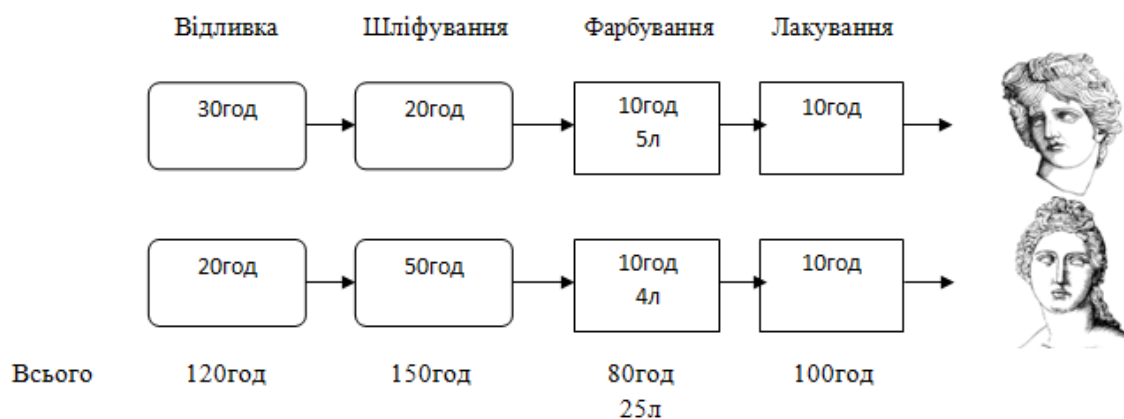


Рис. 2.3. Дані про технологічні норми виготовлення бюстів

Побудова математичної моделі.

Змінні

В якості змінних візьмемо кількість бюстів Аполлона та Афродіти:

- x_1 – кількість бюстів Аполлона (шт.);
- x_2 – кількість бюстів Афродіти (шт.).

Цільова функція: максимізація прибутку від продажі бюстів (тис. грн):

$$\max z = 6x_1 + 16x_2.$$

Обмеження:

- на час відливки:

$$30x_1 + 20x_2 \leq 120 \quad (\text{год});$$

- на час шліфування:

$$20x_1 + 50x_2 \leq 150 \quad (\text{год});$$

- на час фарбування:

$$10x_1 + 10x_2 \leq 80 \quad (\text{год});$$

- на час лакування:

$$10x_1 + 10x_2 \leq 100 \quad (\text{год});$$

- на об'єм фарби:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 25 \quad (\text{л});$$

- на невід'ємність і цілочисельність:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\in Z. \end{aligned}$$

2.7 Задача про військо (складність 1,1).

Постановка задачі. Князь веде війну. Для перемоги йому потрібно щонайменше вдвічі більше воїнів, ніж у противника (у противника їх 100 чол.). Князь може найняти воїнів 3-х типів (лучники, мечники, коп'єносці). Дані про оплату воїнів та час, необхідний їм для спорядження, наведені на рисунку 2.4

За рекомендаціями радників, князю потрібно наняти рівно втричі більше коп'єносців, ніж лучників і мечників разом взятих. Відомо також, що час підготовки до походу не повинен перевищувати 25 діб.

Князю потрібно мінімізувати витрати для найму воїнів.

	Лучники	Мечники	Коп'єносці
Оплата за похід (золотих)	15	14	17
Час для спорядження (підготовки) (год)	3	4	2

Рис. 2.4. Дані для задачі про військо

Побудова математичної моделі.

Змінні:

– x_j – кількість воїнів j -го виду (лучники, мечники, коп'єносці – відповідно).

Цільова функція: мінімізувати загальну вартість всіх воїнів:

$$\min z = 15x_1 + 14x_2 + 17x_3.$$

Обмеження:

– на кількість воїнів:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 200;$$

– на співвідношення лучників і мечників і коп'єносців:

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 0;$$

– на сумарний час спорядження (підготовки) війська:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 600;$$

– на кількість мечників:

$$x_2 \geq 30;$$

– на невід’ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in Z.$$

2.8 Задача про передачу від батьків (складність 1)

Постановка задачі. Максим навчається в університеті та проживає в гуртожитку. Для того, щоб зменшити тривалість часу на приготування їжі, надавши змогу приділяти більше часу навчанню, батьки присилають посилку у вигляді сумки загальним об’ємом 12 дм^3 (рисунок 2.5). Посилка містить котлети та борщ у спеціальних посудинах об’ємом місткістю $0,6 \text{ дм}^3$ та $1,5 \text{ дм}^3$ кожна відповідно. Маса однієї посудини з котлетами складає $0,5 \text{ кг}$, а з борщем – 1 кг . Поживна цінність посудини з котлетами становить 220 Ккал , а з борщем – 190 Ккал .

За побажаннями Максима, борщу повинно бути не менше, ніж 5 дм^3 , а котлет не більше, ніж 4 кг , а сумка не може бути важчою, ніж 10 кг .

Скільки посудин кожного виду продукту слід передати Максиму, для того, щоб поживна цінність передачі була максимальною?

Побудова математичної моделі.

Змінні: x – кількість посудин з котлетами (шт.);

y – кількість посудин з борщем (шт.).

Цільова функція: максимізація поживної цінності передачі (Ккал):

$$\max z = 220x + 190y.$$



Рис. 2.5. Параметри посудин та передачі

Обмеження:

- на сумарний об'єм передачі:

$$0.6x + 1.5y \leq 12 \text{ (дм}^3\text{)};$$

- на загальну масу передачі:

$$0.5x + y \leq 10 \text{ (кг)};$$

- на загальну масу посудин з котлетами:

$$0.5x \leq 4 \text{ (кг)};$$

- на загальний об'єм посудин з борщем:

$$1.5y \geq 5 \text{ (дм}^3\text{)};$$

- на невід'ємність і цілочисельність:

$$x, y \geq 0,$$

$$x, y \in \mathbb{Z}^+$$

2.9 Задача про вежу (складність 1)

Постановка задачі. Граючи у гру Minecraft, ти захотів побудувати вежу з булижників. Для видобутку булижників необхідна кирка. У торговця є кирки трьох видів: дерев'яні, кам'яні та залізні. Параметри кирок та їхня вартість

приведені у табл. 2.5 та на рис. 2.6. У тебе є 20 золотих монет. У сумці може вміститися не більш, ніж 5 кирок. На видобуток буличників ти можеш витратити не більш ніж 10 хвилин.

Необхідно визначити, які кирки купити, щоб побудувати найвищу вежу (висота вежі вимірюється і буличниками).

Примітка. Кирка використовується доти, поки не зламається (до тих пір, доки не закінчиться її запас міцності).

Таблиця 2.5

Параметри кирок та їхня вартість

Вид кирки	Ціна (золоті монети)	Час видобутку одного буличника (сек.)	Запас міцності (кількість буличників, які можна видобути за допомогою однієї кирки)
Дерев'яна	1	2,25	26
Кам'яна	4	1,15	114
Залізна	15	0,75	334

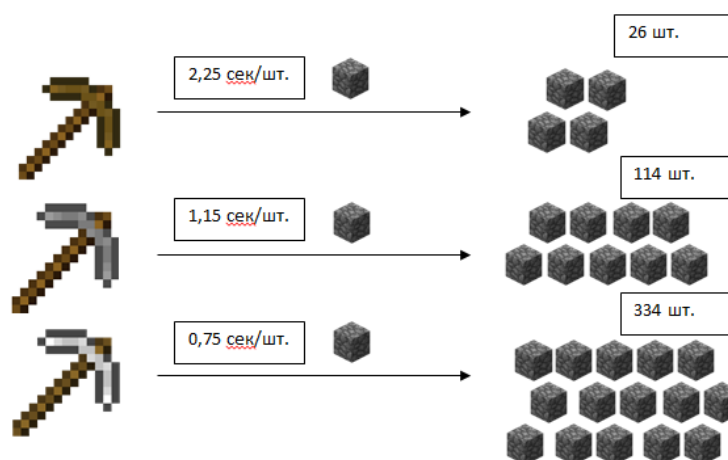


Рис. 2.6. Параметри кирок

Побудова математичної моделі.

Змінні:

- x_1 – кількість куплених дерев'яних кирок (шт.);
- x_2 – кількість куплених кам'яних кирок (шт.);
- x_3 – кількість куплених залізних кирок (шт.).

Цільова функція: максимізація сумарної висоти вежі:

$$\max z = 26x_1 + 114x_2 + 334x_3.$$

Обмеження:

– на кількість золота:

$$1x_1 + 4x_2 + 15x_3 \leq 20 \text{ (в золотих монетах);}$$

– на розмір сумки:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \text{ (шт);}$$

– на кількість часу видобутку буличників:

$$2.25x_1 + 1.15x_2 + 0.75x_3 \leq 600 \text{ (сек);}$$

– на невід'ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}.$$

2.10 Задача про підробіток (складність 1).

Андрій, окрім занять у школі, для підтримання свого належного фінансового рівня має змогу підзаробляти в двох магазинах.

Враховуючи відомості, отримані при спілкуванні з працівниками цих магазинів, він за 10-бальною шкалою оцінив "напруженість" одного часу роботи у 8 і 6 балів для першого і другого магазинів відповідно. Зрозуміло, що сумарна "напруженість" роботи в кожному з магазинів за тиждень пропорційна кількості відпрацьованих годин.

Дані про час роботи в магазинах та оплату праці в кожному з них вказано у таблиці 2.6.

Скільки годин на тиждень Андрій повинен робити в кожному магазині, щоб мінімізувати загальну напруженість роботи і заробляти не менше 360 грн. на тиждень?

Таблиця 2.6

Дані про час роботи в магазинах та оплату праці

Магазин №	Заробітна плата(грн. за годину)	Мінімальний час роботи в тиждень (год.)	Максимальний час роботи в тиждень (год.)	«Напруженість» за один час роботи (бали)
1	35	5	12	8
2	30	6	10	6

Побудова математичної моделі.

Змінні:

- x_1 – час роботи у першому магазині (годин);
- x_2 – час роботи у другому магазині (годин).

Цільова функція: мінімізація «напруженості» роботи:

$$\min z = 8x_1 + 6x_2.$$

Обмеження:

- на час роботи в першому магазині: $5 \leq x_1 \leq 12$;
- на час роботи в другому магазині: $6 \leq x_2 \leq 10$;
- на оплату роботи: $35x_1 + 30x_2 \geq 360$;
- на невід’ємність: $x_1, x_2 \geq 0$.

2.11 Задача про коваля та зброю (складність 1)

Постановка задачі. Коваль виробляє три види зброї: піки, мечі та сокири, які зберігаються на складі. Місткість складу 34 одиниць зброї. Всі параметри виготовлення зброї наведено в таблиці 2.7. Ковалю потрібно налагодити виробництво так, щоб одержати найбільше прибутків.

Таблиця 2.7

Параметри виготовлення зброї

Види матеріалів	Витрати матеріалів на виготовлення одиниці зброї			Загальна кількість матеріалів на складі (одиниць)
	Меч 	Сокира 	Піки 	
Деревина 	-	2	4	60
Сталь 	4	2	1	80
Ціна зброї (золотих)	90	90	100	

Побудова математичної моделі

Змінні: x_j – кількість зброї j -го виду (мечі, сокири, піки – відповідно).

Цільова функція: максимізація прибутку від продажу зброї (золотих):

$$\max z = 90x_1 + 90x_2 + 100x_3.$$

Обмеження:

– на використання деревини:

$$2x_2 + 4x_3 \leq 60;$$

– на використання сталі:

$$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 80;$$

– на місткість складу:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 34;$$

– на невід’ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 \in Z.$$

2.12 Задача про продаж напоїв (складність 1,2)

Постановка задачі. Магазин В&К продає два види безалкогольних напоїв: Соса-сола – відомого виробника і колу В&К власного виробництва. Прибуток від реалізації однієї банки Соса-сола становить 5 грн., тоді як прибуток від однієї банки власної коли - 7 грн. У середньому магазин за день може продати не більше 500 банок обох напоїв. Незважаючи на те, що Соса-Сола – відома торгова марка, покупці віддають перевагу колі В&К: підраховано, що обсяги продажів коли В&К і Соса-Сола (у натуральному обчисленні) співвідносяться не менше, як 2:1. Окрім того, відомо, що магазин продає не менше 100 банок Соса-сола в день. Скільки банок кожного напою повинен мати магазин на початку робочого дня для максимізації прибутку?

Побудова математичної моделі.

Змінні:

– x_1 – кількість банок Соса-сола (в штуках);

– x_2 – кількість банок коли В&К (в штуках).

Цільова функція: максимізація прибутку від продажу напоїв:

$$\max z = 5x_1 + 7x_2.$$

Обмеження:

– на щоденну кількість продажу:

$$x_1 + x_2 \leq 500;$$

– на кількість банок Coca-cola:

$$x_1 \geq 100;$$

– на співвідношення між видами напоїв:

$$x_2 \geq 2x_1;$$

– на невід’ємність і цілочисельність:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\in Z \end{aligned}$$

2.13 Задача про виготовлення сумок (складність 1,2)

Постановка задачі. Компанія Gussі виробляє дорожні сумки, валізи і рюкзаки. Для цього використовують натуральну шкіру і синтетичні матеріали. Шкіра є обмеженим ресурсом. Виробництво вимагає виконання двох ручних операцій: прошивки і остаточної обробки виробу. У таблиці 2.8 наведено обмеження на ресурси, використані у виробництві, а також відпускну ціну кожного виду товару. Додатково відомо, що кількість сумок повинна становити не менше 45% від загальної кількості продукції.

Яких сумок і в якій кількості потрібно шити для отримання максимального прибутку?

Таблиця 2.8

Обмеження на ресурси

Ресурс	Ресурси, необхідні для виготовлення одного виробу			Добовий ліміт ресурсу
	Сумка	Валіза	Рюкзак	
Шкіра (кв. фути)	2	1	3	42
Прошивка (години)	2	1	2	40
Остаточна обробка (години)	1	0,5	1	45
Відпускна ціна (од.вартості)	24	22	45	

Побудова математичної моделі.

Змінні:

- x_1 – кількість дорожніх сумок (шт.);
- x_2 – кількість валіз (шт.);
- x_3 – кількість рюкзаків (шт.).

Цільова функція: максимізація прибутку від реалізації:

$$\max z = 24x_1 + 22x_2 + 45x_3.$$

Обмеження:

- на використання шкіри:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 42 \text{ (кв. фути);}$$

- на загальний час прошивки:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \text{ (години);}$$

- на загальний час операції остаточної обробки:

$$x_1 + 0,5x_2 + x_3 \leq 45 \text{ (години);}$$

- на співвідношення кількості сумок та загальної кількості продукції (кількість сумок повинна становити не менше 45% від загальної кількості продукції):

$$x_1 \geq 0,45(x_1 + x_2 + x_3) ;$$

- на невід'ємність і цілочисельність:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 &\in Z \end{aligned}$$

2.14 Задача про коктейль (складність 1,4)

Постановка задачі. У барі "Корсар" великий об'єм денного замовлення на коктейль "Рішельє". Його рецептура полягає в змішуванні двох складових, кожна з яких є сумішшю джин-тоніка і вермуту. Вартість відповідних складових наведена в таблиці 2.9.

Вимоги до коктейлю "Рішельє" (згідно ТУ-1234-2000): в ньому повинно бути не більше 60% джин-тоніка і не менше 20% вермуту.

Скласти рецептуру коктейлю "Рішельє", щоб відповідати вимогам ТУ і отримати коктейль за мінімальними для бару витратами?

Склад вихідних сумішей

	Джин-тонік	Вермут	Вартість (грн за 1 літр)
	(в частках на одиницю об'єму)		
Суміш 1	0,4	0,6	30
Суміш 2	0,8	0,2	10

Ілюстрація умов задачі представлена на рисунку 2.7.

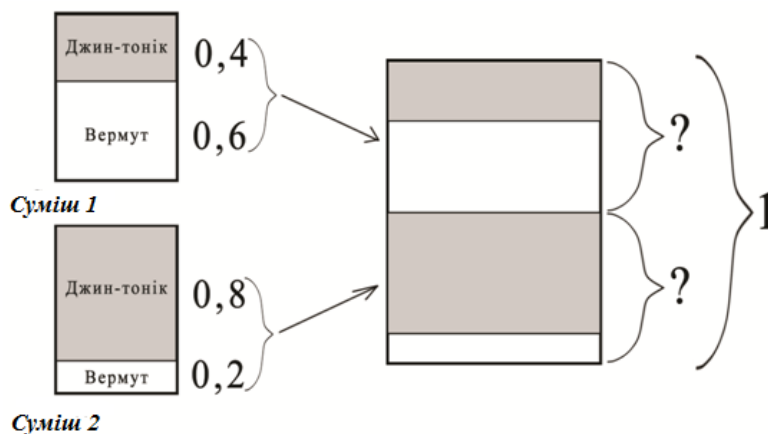


Рис. 2.7. Умова задачі

Побудова математичної моделі.

Змінні. В задачах про суміші (сплави) в якості змінних x_j позначають об'єм (масу,) інгредієнту j -го типу, який входить в склад **однієї одиниці** об'єму (маси) результуючої суміші. Отже:

- x_1 – об'єм суміші 1 в 1 літрі результуючої суміші (в літрах) (або частка суміші 1 в результуючій суміші);
- x_2 – об'єм суміші 2 в 1 літрі результуючої суміші (в літрах) (або частка суміші 2 в результуючій суміші).

Цільова функція. Метою задачі є складання результуючої суміші мінімальної вартості:

$$\min z = 30x_1 + 10x_2.$$

Обмеження. Особливістю задач про суміші (сплави) є обов'язкова наявність обмеження, яке визначає факт того, що **сума всіх частин суміші (сплаву) повинна бути рівна одиниці**:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Розглянемо тепер обмеження, які враховують вимоги до складу результуючої суміші. За умовою відсоток вмісту джин-тоніка в суміші 1 рівний 40. Це означає, що x_1 літрів суміші 1 містить $0,4x_1$ літрів джин-тоніка. Аналогічно, в x_2 літрів суміші 2 міститься $0,8x_2$ літрів джин-тоніка. Максимальний відсоток вмісту джин-тоніка в результуючій суміші рівний 60 (в 1 л результуючої суміші має бути не більше 0,6 л джин-тоніка). Враховуючи, що кінцева суміш складається з сумішей 1 та 2, запишемо обмеження, яке виконує дану умову:

$$0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 0,6.$$

Обмеження по вмісту вермуту:

$$0,6x_1 + 0,2x_2 \geq 0,2.$$

Враховуючи фізичний зміст змінних x_1 , x_2 , запишемо обмеження невід'ємності:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2.15 Задача про верстати (складність 1,5)

Постановка задачі. Виріб складається із двох деталей, обробка яких може бути виконана на одному із трьох видів верстатів: СТ1, СТ2, СТ3. Необхідно закріпити деталі за верстатами так, щоб за одну годину роботи отримувати максимальну кількість готових виробів. Продуктивність верстатів по кожній з деталей наведено в таблиці 2.10.

Таблиця 2.10

Продуктивність верстатів

Типи верстату	Продуктивність верстатів (дет./год.)	
	Деталь №1	Деталь №2
СТ1	15	10
СТ2	40	12
СТ3	30	45

Умова задачі схематично зображена на рисунку 2.8.

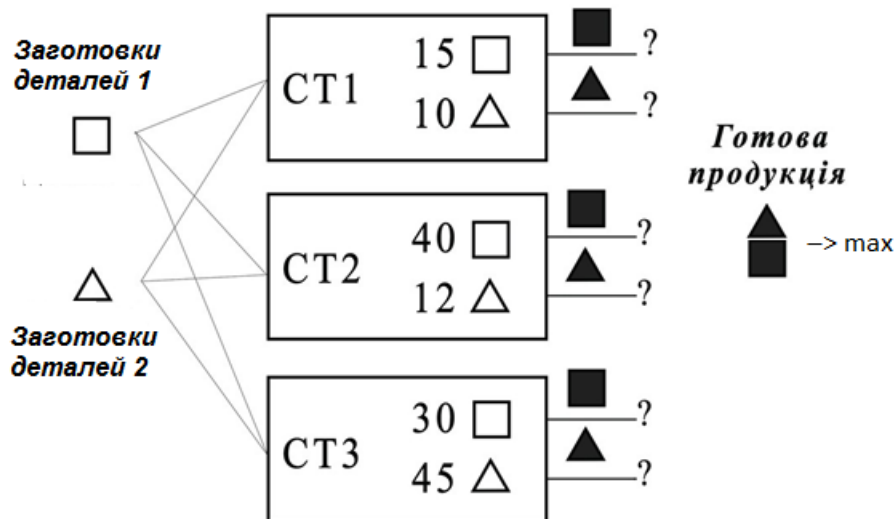


Рис. 2.8. Умова задачі

У даному випадку змінним можна надати різний зміст, це призведе до різних математичних моделей (але не змінить оптимум).

Побудова математичної моделі 1

Змінні. За умовою кожна з деталей може оброблятися на кожному з верстатів, і нам необхідно визначити, скільки ж деталей кожного типу потрібно виготовити на кожному з верстатів. Отже змінні мають таке значення:

x_{ij} – кількість деталей j -го типу, які впродовж години обробляються на верстаті i -го типу ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2}$) (наприклад, x_{11} – кількість деталей першого типу, які обробляються верстатом СТ1).

Цільова функція

Мета полягає в тому, щоб за годину виготовляти максимальну кількість готових виробів. За умовою, готовий виріб включає в себе по одній деталі кожного типу, отже:

$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{готових} \\ \text{виробів} \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{першого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{другого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$
$\rightarrow \max$		$x_{11} + x_{21} + x_{31}$		$x_{12} + x_{22} + x_{32}$

Цільова функція (максимізація кількості готових виробів) матиме вигляд:

$$\max \quad z = x_{11} + x_{21} + x_{31},$$

(або $\max \quad z = x_{12} + x_{22} + x_{32}$)

$$\text{або } \max z = x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32}.$$

Обмеження

По-перше, ми повинні врахувати комплектність готового виробу:

$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{готових} \\ \text{виробів} \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{першого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{другого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$
		$x_{11} + x_{21} + x_{31}$		$x_{12} + x_{22} + x_{32}$

Це означає, що кількості деталей обох типів повинні співпадати (не треба виробляти «зайвих» деталей):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = x_{12} + x_{22} + x_{32}.$$

Обмеження також повинні враховувати продуктивність верстатів. Якщо впродовж **однієї години** на верстаті СТ1 обробляється x_{11} деталей першого типу та x_{12} деталей другого типу, то на це витрачається $\frac{x_{11}}{15}$ та $\frac{x_{12}}{10}$ годин відповідно.

Отже, для СТ1 повинно виконуватись:

$$\frac{x_{11}}{15} + \frac{x_{12}}{10} \leq 1 \text{ (год)}.$$

Аналогічно для СТ2 та СТ3 обмеження мають вигляд:

$$\frac{x_{21}}{40} + \frac{x_{22}}{12} \leq 1 \text{ (год)};$$

$$\frac{x_{31}}{30} + \frac{x_{32}}{45} \leq 1 \text{ (год)}.$$

Враховуючи фізичний зміст змінних, вони мають бути невід'ємними та цілими:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0, \text{ цілі}.$$

Побудова математичної моделі 2

Змінні.

Надамо змінним такі значення:

x_{ij} – частка години, впродовж якої верстат i -го типу обробляє деталі j -го типу ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,2}$) (год);

y – кількість готових виробів (додаткова змінна).

Цільова функція. Мета задачі полягає в тому, щоб за годину виготовляти максимальну кількість готових виробів. Отже, цільова функція матиме вигляд:

$$\max z = y.$$

Обмеження

Обмеження на комплектність:

$$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{готових} \\ \text{виробів} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{першого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$$

$$y = 15x_{11} + 40x_{21} + 30x_{31},$$

$$\begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{готових} \\ \text{виробів} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{кількість} \\ \text{деталей} \\ \text{другого} \\ \text{типу} \end{pmatrix}$$

$$y = 10x_{12} + 12x_{22} + 45x_{32}.$$

Оскільки усі розрахунки ведуться для однієї години роботи верстатів, то для верстатів повинні виконуватись такі обмеження:

$$\text{СТ1:} \quad x_{11} + x_{12} \leq 1.$$

$$\text{СТ2:} \quad x_{21} + x_{22} \leq 1;$$

$$\text{СТ3:} \quad x_{31} + x_{32} \leq 1.$$

Враховуючи фізичний зміст змінних, маємо:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0,$$

$$y \geq 0, \text{ ціле.}$$

2.16 Задача про пластилін (складність 1,5)

Постановка задачі. Дитячий садок отримав 500 брикети пластиліну довжиною 5 см. Їх необхідно розрізати на великі та малі частини довжиною 2 і 1,5 см відповідно, з яких потім складають комплекти, необхідні для проведення занять по ліпленню. В кожний комплект входить 3 великі частини та 2 малі.

Характеристики можливих варіантів розкрою брикетів представлені в таблиці 2.11 та на рисунку 2.9.

Визначити, яким чином розрізати наявні брикети пластиліну, щоб отримати максимальну кількість комплектів.

Таблиця 2.11

Характеристики можливих варіантів

Варіанти розкрою	Кількість частин, шт.		Відходи, см
	Великі	Малі	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектність, шт./компл.	3	2	

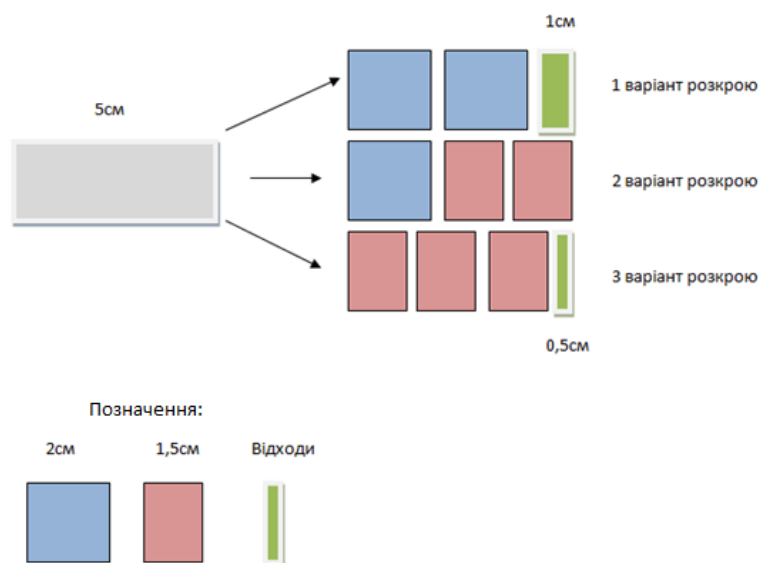


Рис. 2.9. Можливі варіанти розкрою

Побудова математичної моделі.

Змінні:

- x_1 – кількість брикетів, розділених за першим варіантом;
- x_2 – кількість брикетів, розділених за другим варіантом;
- x_3 – кількість брикетів, розділених за третім варіантом;
- y – кількість комплектів.

Цільова функція: максимізація кількості сформованих комплектів:

$$\max z = y.$$

Обмеження:

- на запас брикетів:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500;$$

– кількість отриманих великих частин (по 2 см) повинно бути щонайменше в 3 рази більше кількості комплектів (великих частин повинно бути достатньо для комплектації y комплектів):

$$\frac{2x_1 + x_2}{3} \geq y \quad \text{або} \quad 2x_1 + x_2 - 3y \geq 0;$$

– кількість отриманих малих частин (по 1,5 см) повинно бути щонайменше в 2 рази більше кількості комплектів (великих частин повинно бути достатньо для комплектації y комплектів):

$$\frac{2x_2 + 3x_3}{2} \geq y \quad \text{або} \quad 2x_2 + 3x_3 - 2y \geq 0;$$

– на невід’ємність і цілочисельність:

$$x_1, x_2, x_3, y \in \mathbb{Z}^+.$$




2.17 Задача про виробництво (складність 2)

Постановка задачі. На ділянці цеху виготовляється виріб, який складається з трьох видів деталей. За технологією виробництва (рисунок 2.10) для готового виробу необхідно 2 деталі 1-ого типу, 3 деталі 2-ого типу та 1 деталь 3-ого типу. Деталі можуть вироблятися на кожному з двох верстатів ділянки. Час, необхідний для виготовлення однієї деталі на кожному з верстатів та фонд робочого часу верстатів, наведений в таблиці 2.12.

Необхідно скласти такий добовий план виробництва *деталей на ділянці*, при якому кількість готових виробів була б максимальною.

Таблиця 2.12

Час виготовлення однієї деталі та фонд робочого часу верстатів

	Час виготовлення однієї деталі, в хвилинах			Фонд робочого часу, в годинах
				
Верстат 1	5	3	6	10
Верстат 2	4	5	3	14

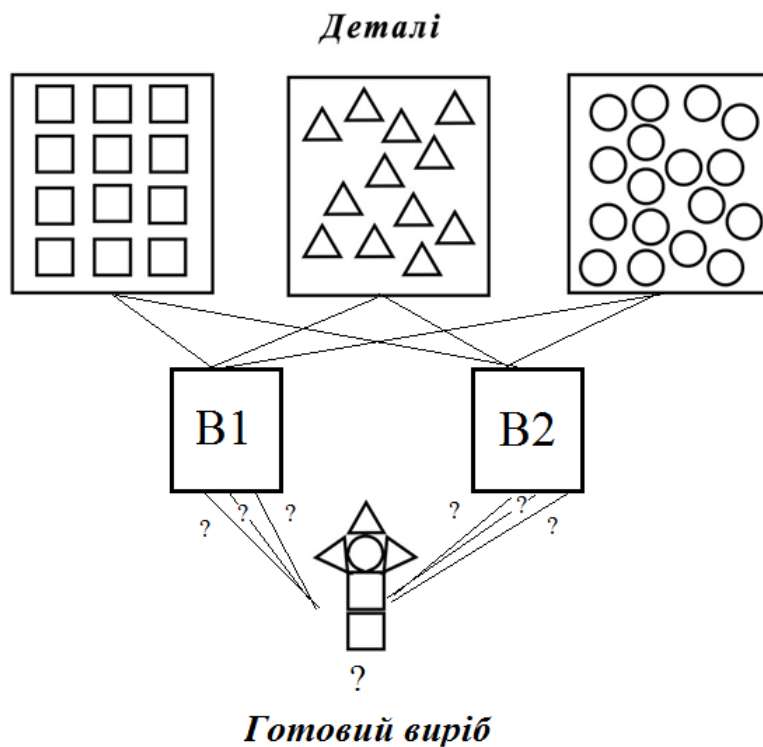


Рис. 2.10. Схематичний опис змістовної постановки задачі

Побудова математичної моделі.

Змінні:

- y – кількість готових виробів;
- x_{ij} – кількість деталей i -того типу ($i = \overline{1,3}$), яку необхідно виготовляти на j -ому верстаті ($j = \overline{1,2}$).

Цільова функція: максимізувати кількість готових виробів: $\max z = y$.

Обмеження:

- на кількість деталей 1-ого типу: $x_{11} + x_{12} \geq 2y$;
- на кількість деталей 2-ого типу: $x_{21} + x_{22} \geq 3y$;
- на кількість деталей 3-ого типу: $x_{31} + x_{32} \geq y$;
- на фонд робочого часу 1-ого верстату: $5x_{11} + 3x_{21} + 6x_{31} \leq 600$;
- на фонд робочого часу 2-ого верстату: $4x_{12} + 5x_{22} + 3x_{32} \leq 840$;
- на невід'ємність і цілочисельність: $x_{ij}, y \geq 0, x_{ij}, y \in Z$.

3 ЗАДАЧІ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

3.1 Задачі категорії А

3.1.1 (34, 1 бал) Фірма, яка виготовляє для армії шкіряні вироби, виробляє 3 типи продукції: A , B та B . Кожний тип продукції повинен пройти принаймні дві з трьох виробничих дільниць, які мають назви: дубильна, розкрійна та кінцева. Робочий час кожної з цих дільниць протягом місяця має такі обмеження: дубильна дільниця – 320 годин на місяць, розкрійна – 400 та кінцева – 160. На виготовлення одиниці продукції типу A необхідно 0.2 години роботи дубильної дільниці, 0.6 годин роботи розкрійної дільниці та 0 годин – кінцевої дільниці. На виготовлення одиниці продукції типу B необхідно відповідно 0.3 години, 0.5 години та 0 годин. На виготовлення одиниці продукції типу B необхідно відповідно 0.4 години, 0.4 години та 0.8 години. З урахуванням накладних витрат прибуток від кожної одиниці продукції складе 60 грн. для типу A , 70 грн. для типу B та 100 грн. для типу B .

Знайти: при якій кількості виробів, що виготовляються, сумарний прибуток фірми буде максимальним.

3.1.2 (36, 1 бал) На взуттєвій фабриці можна виготовляти 3 види взуття: чоловіче, жіноче та дитяче. На кожну пару чоловічого, жіночого та дитячого взуття необхідно відповідно клею 20, 15 та 10 г, шкіри 4, 2 та 1 дм^2 . Вартість чоловічого, жіночого та дитячого взуття з урахуванням усіх робіт відповідно дорівнює 200, 300 та 100 од. вартості. Запаси клею складають 3 т, а шкіри – 4000 м^2 . Розглянемо 2 моделі: у першій усі існуючі ресурси використовуються повністю, а у другій остання вимога є необов'язковою. В обох випадках мета полягає у виборі такого виробництва взуття, при якому вартість виготовленої продукції є максимальною.

3.1.3 (40, 1 бал) *Транспортна задача.* Існує m пунктів відправлення, у кожному з яких зібрано деяку кількість одиниць однорідного продукту, призначеного до відправлення: в i -му пункті знаходиться a_i одиниць ($i=1, \dots, m$).

Цей продукт необхідно доставити у n пунктів призначення (споживання), причому в j -й пункт призначення необхідно доставити b_j одиниць продукту, $j=1, \dots, n$. Кожний пункт відправлення з'єднаний з кожним пунктом призначення

деяким маршрутом (кількість таких маршрутів $m_{хл}$), причому відома вартість c_{ij} перевезення однієї одиниці продукту з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення. Загальна вартість перевезення за будь-яким маршрутом пропорційна кількості продукту, що перевозиться. Потрібно скласти план перевезень, мінімізуючий загальну вартість перевезень.

3.1.4 (97, 1 бал) Злий чарівник у важкі мирні часи заробляє на життя тим, що продає саморобні зілля. Але готувати він навчився лише чотири види: зілля лікування, зілля відновлення мани, протиотруту і приворотне зілля.

Основою кожного зілля є корінь мандрагори, сушені комахи і кульбаба звичайна. За день чарівник може зібрати 20 коренів мандрагори, 50 кульбаб, наловити і засушити 150 комах.

Досвід показав, що приворотних зіль продається по щонайменше в 2 рази більше, ніж інших разом узятих.

На приготування одного зілля лікування витрачається 3 кореня мандрагори, 15 комах і 4 кульбаб. На зілля відновлення мани витрачається стільки ж, тільки комах в 2 рази більше. На протиотруту витрачається 1 корінь мандрагори і 6 кульбаб. А на приворотне зілля – 2 кореня, 18 комах і 1 кульбаба. Вартість зілля становить 16, 6, 11, і 7 золотих відповідно.

Визначити, в яких кількостях чарівник повинен готувати зілля кожного з видів, щоб отримати найбільший прибуток від їх продажу.

3.1.5 (101, 1 бал) Для годування піддослідної тварини їй необхідно давати щодня не менше 15 мг речовини A_1 (вітаміну або деякого мінералу) та 20 мг. речовини A_2 .

На даний момент немає можливості купувати речовини A_1 та A_2 в чистому вигляді, проте можна купувати альтернативні харчові добавки: B_1 та B_2 . Вартість харчових добавок:

- B_1 – 1 грн\кг;

- B_2 – 3 грн\1 кг.

При цьому кілограм добавки B_1 містить 1 мг речовини A_1 і 5 мг речовини A_2 , а кілограм B_2 – 6 мг A_1 і 1 мг A_2 .

Визначити оптимальний вміст речовин B_1 та B_2 в щоденному раціоні при мінімальних витратах.

3.1.6 (102, 1 бал) Підприємство має у своєму розпорядженні деякі ресурси сировини, робочої сили і обладнання, необхідні для виробництва будь-якого з чотирьох видів товарів, що виробляються. Витрати ресурсів на виготовлення одиниці кожного виду товару, прибуток, одержуваний підприємством, а також запаси ресурсів вказані в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Витрати ресурсів

Вид ресурсу \ Вид товару	1	2	3	4	Обсяг ресурсів
Сировина, кг.	3	5	2	4	60
Робоча сила, год.	22	14	18	30	400
Обладнання, верстатогод.	10	14	8	16	128
Прибуток на одиницю товару, грн.	30	25	56	48	

Додаткові умови:

- 1-го товару випустити не більше 15 од.;
- 2-го – не менше 8 од.;
- 3-го і 4-го – у відношенні 1:2.

В яких обсягах треба випускати товари, щоб прибуток був максимальним?

3.1.7 (103, 1 бал) Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро і книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок: типу I і типу II. При цьому фабрика має в наявності 1500 м дошок типу I і 1000 м дошок типу II. Крім того, відомо, що фабрика має трудові ресурси в кількості 800 людино-год.

У таблиці 3.2 наведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу кожного типу і відповідний прибуток.

Таблиця 3.2

Нормативи витрат кожного з видів ресурсів

Вироби \ Ресурси	Витрати на 1 виріб			
	Стіл	Стілець	Бюро	Книжкова шафа
Дошки типу I, м	5	1	9	12
Дошки типу II, м	2	3	4	1
Трудові ресурси, людино-год.	3	2	5	10
Прибуток, од.варт./вир.	12	5	15	10

Додаткові умови, що накладаються на асортимент:

- столів повинно бути випущено не менше 40;

- стільців - не менше 130;
- бюро — не менше 30;
- книжкових шаф — не більше 10;
- умова комплектності: кількість столів відноситься до кількості стільців, як 1:6.

Визначити оптимальний асортимент продукції, який максимізує прибуток.

3.1.8 (7, 1 бал) Транспортна компанія для перевезення інжиру з Багдаду в Мекку використовує одно- і двогорбих верблюдів. Двогорбий верблюд може перевезти 1000 фунтів, а одногорбий – 500 фунтів. За один перехід двогорбий верблюд споживає 3 купи сіна і 100 галонів води. Одногорбий верблюд споживає 2 купи сіна і 30 галонів води. Пункти постачання компанії, розміщені у різних оазисах вздовж шляху, можуть видати не більш 900 галонів води і 35 кіп сіна. Одно- і двогорбі верблюди орендуються у пастуха поблизу Багдаду, орендна платня дорівнює 8 піастрам за двогорбого верблюда і 5 піастрам – за одногорбого.

Якщо компанія повинна перевезти 10 000 фунтів інжиру з Багдаду в Мекку, скільки потрібно використовувати одно- і двогорбих верблюдів для мінімізації орендної платні пастуху?

3.1.9 (8, 1 бал) Авіакомпанія за замовленням армії повинна перевезти на деякій ділянці 700 чол. В розпорядженні авіакомпанії є два типи літаків, які можна використовувати для перевезення. Літак типу 1 перевозить 30 пасажирів і має екіпаж з 3 чол. Літак типу 2 перевозить 65 пасажирів і має екіпаж з 5 чол. Експлуатація 1 літака типу 1 обійдеться в 5000 грн., а типу 2 – 9000 грн.

Скільки потрібно використати літаків кожного типу, якщо для формування екіпажів літаків може бути використано 60 чол?

3.1.10 (9, 1.2 бала) Ферма виробляє сіно і пшеницю. Сіно дає 60 грн. прибутку на тонну, а пшениця – 180 грн. прибутку на 100 бушелів. Для отримання 1 тонни сіна потрібно 1 акр землі, витрати 1 людино-години праці і не потрібне добриво. Для отримання 10 бушелів пшениці треба 8 акрів землі, 3 людино-години праці і 1 мішок добрива. Ферма має 400 акрів землі, 150 людино-годин праці і 40 мішків добрива.

I. Сформулювати задачу для визначення, скільки потрібно виготовити сіна і пшениці.

II. Розв'язати цю задачу графічним способом. Припустивши, що керуючий фермою зумів отримати максимальний прибуток, вказати: а) найвищу орендну платню в рік за акр, яку він погодився б виплачувати за використання додаткової землі; б) найвищу платню одної людино-години, яку він погодився б виплачувати для того, щоб збільшити кількість людино-годин, що є в його розпорядженні; в) найвищу вартість мішка добрива, за якою б він погодився б купувати додаткове добриво.

3.1.11 (21, 1.2 бала) Вироби чотирьох типів проходять послідовну обробку на двох верстатах. Час обробки одного виробу кожного типу на кожному з верстатів наведено у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Час обробки одного виробу кожного типу

Верстат	Час обробки одного виробу, год			
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одного виробу кожного типу визначаються як величини, прямо пропорційні часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість машино-години дорівнює 10 грн. для верстата 1 і 15 грн. для верстата 2. Припустимий час використання верстатів для обробки виробів усіх типів обмежено такими значеннями: 500 машино-годин для верстата 1 і 380 машино-годин для верстата 2. Вартість виробів типу 1, 2, 3 і 4 дорівнює 85, 70, 55 і 45 грн. відповідно. Сформулюйте для наведених вимог задачу максимізації сумарного чистого прибутку.

3.1.12 (98, 1.2 бала) Студент Вася хоче отримати з деякої дисципліни високу оцінку. До бажаної оцінки йому не вистачає 25 балів.

Щоб набрати ці бали, викладач дозволив Васі приносити реферати, презентації, а також різні додаткові завдання, які діляться на три категорії: просте, середньої складності і високої складності. Кількість балів, в які викладач оцінює кожен з перелічених видів робіт, наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Кількість балів

Вид завдання	Реферат	Презентація	Просте додаткове завдання	Додаткове завдання середньої складності	Додаткове завдання високої складності
Бали	4	5	2	4	6

Сумарна кількість рефератів і презентацій, які викладач може прийняти в одного студента, не повинна перевищувати трьох.

Згідно з вимогами викладача, кожен студент, який бажає отримати високу оцінку, повинен здати хоча б одне додаткове завдання низької або високої складності, а також не менше двох простих додаткових завдань.

Кількість часу, який Вася витрачає на виконання перерахованих видів завдань, наведено в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Кількість часу відповідно перерахованих видів завдань

Вид завдання	Реферат	Презентація	Просте додаткове завдання	Додаткове завдання середньої складності	Додаткове завдання високої складності
Час (год.)	3	3,5	2	3,5	5

Як Вася повинен розподілити час між виконанням різних видів робіт з даної дисципліни, щоб отримати бажану оцінку, але при цьому витратити якомога менше часу?

3.1.13 (100, 1.2 бала) Для виготовлення двох видів виробів *A* та *B* фабрика витрачає в якості сировини сталь і кольорові метали, наявні в обмеженій кількості. При виготовленні цих двох виробів використовуються токарні та фрезерні верстати. У таблиці 3.6 наведені обсяги ресурсів і норми їх витрати.

Таблиця 3.6

Обсяги ресурсів і норми їх витрати

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Норми витрат	
		Виріб А	Виріб В
Сталь	570 кг	10 кг/вир	70 кг/ вир
Кольорові метали	420 кг	20 кг/ вир	50 кг/ вир
Токарні верстати	56 версто-год	3 вир /год	4 вир / год
Фрезерні верстати	34 версто-год	2 вир / год	1 вир / год
Прибуток	Од. вартості	3	8

Визначити план випуску продукції, при якому буде досягнутий максимальний прибуток.

3.1.14 (11, 1.2 бала) Підприємство може працювати за п'ятьма технічними процесами ($T1$, $T2$, $T3$, $T4$ і $T5$) і при цьому кількість продукції, що виробляється різними технологічними процесами за одиницю часу, дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 штук відповідно. У процесі виробництва використовуються такі виробничі фактори: сировина 1, сировина 2, сировина 3 та електроенергія. Витрати відповідних факторів при роботі за різними технологічними процесами протягом одиниці часу вказані у табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Витрати відповідних факторів

Виробничі фактори	Витрати при різних технологіях					Ліміт
	T1	T2	T3	T4	T5	
Сировина 1	15	20	12	14	18	2000
Сировина 2	4	5	6	3	2	1000
Сировина 3	6	3	4	6	3	1600
Електроенергія	0.2	0.3	0.15	0.25	0.3	300

Знайти програму максимального випуску продукції.

3.1.15 (105, 1.2 бала) *Задача про «Монополію»*. Хлопчик Міша дуже любить свою настільну гру «Монополія», але втратив майже всі купюри. Його тато Віктор Миколайович вирішив допомогти сину, тому він відсканував купюри 100 грн, 1000 грн і 100 доларів, щоб їх надрукувати і заламінувати. Але вдома в принтері виявилося дуже мало фарби, всього:

- 3 г. зеленої;
- 3,6 г. синьої;
- 2 г. червоної;
- 6 г. чорної.

До того ж і ламінуючого спрею залишилося тільки 70мл, чого вистачить лише на 1900 см² паперу. Витрати фарби на кожну купюру вказані в таблиці 3.8 в міліграмах.

Витрати фарби на кожну купюру

Купюри	Витрати фарби на купюру (млг)			
	Зелена	Синя	Червона	Чорна
100 грн	15	100	10	70
1000 грн	20	30	150	120
\$100	200	18	20	40

Площі купюр 100 грн., 1000 грн. і \$ 100 складають відповідно 50 см², 70 см² і 75 см². Площа листа формату А4 дорівнює 620 см². У «Монополії» вартість \$ 1 дорівнює 5 грн. Міша хотів би, щоб кожного виду купюр було надруковано не менш ніж 7 шт, а загальна сума надрукованих грошей була максимальною.

Сформулюйте математичну модель даної задачі.

3.1.16 (37, 1.3 бала) *Планування капіталовкладень*. Нехай капітал K необхідно розподілити на створення у віддалених один від одного населених пунктах L_1, L_2, L_3 та L_4 промислових об'єктів, вартість будівництва яких залежить від географічного положення населених пунктів (у кожному з них може бути побудовано кілька об'єктів). Нехай на будівництво одного промислового об'єкта у населеному пункті L_i ($i=1, 2, 3, 4$) необхідний капітал B_i ($i=1, 2, 3, 4$). Позначимо через C_i ($i=1, 2, 3, 4$) питомий прибуток, що відповідає капіталовкладенням у населеному пункті L_i ($i=1, 2, 3, 4$). Необхідно вибрати населені пункти і знайти кількість промислових об'єктів, які підлягають будівництву у кожному з них таким чином, щоб загальний прибуток був максимальним.

3.1.17 (38, 1.3 бала) *Задача про рюкзак*. Мандрівник, збираючись у похід, хоче покласти у рюкзак деяку кількість предметів X_1, X_2, \dots, X_n . Він знає вагу P_i та об'єм V_i кожного предмета X_i . Загальна вага рюкзака не повинна перевищувати P , а об'єм – V . Мандрівник, користуючись суб'єктивними оцінками корисності предметів, приписує кожному з них коефіцієнт корисності C_i . Як вибрати предмети мандрівнику, якщо він хоче, щоб сумарна корисність того, що міститься у рюкзаку, була максимальною?

3.1.18 (43, 1.3 бала) 3 п. А у п. В щоденно відходять пасажирські та швидкі поїзди. У табл. 3.9 вказані кількість вагонів різних типів, з яких щоденно можна комплектувати поїзди, та кількість пасажирів, на яку розраховано вагони. Знайти

оптимальну кількість швидких й пасажирських поїздів, при якій кількість пасажирів, що перевозиться, буде максимальна.

Таблиця 3.9

Кількість вагонів різних типів

Вагон	Парк вагонів	Швидкий	Пасажирський	Кількість пасажирів
Багажний	12	–	1	–
Поштовий	18	1	1	–
Плацкартний	89	5	8	54
Купейний	79	6	4	36
СВ	35	4	2	18

3.2 Задачі категорії Б

3.2.1 (10, 1.5 бала) Промислова фірма виготовляє виріб, який являє собою збірку з трьох різних вузлів. Ці вузли виготовляються на двох заводах. Через відмінності у складі технологічного обладнання продуктивність заводів з випуску кожного з трьох видів вузлів неоднакова. У наведеній табл. 3.10 розташовані початкові дані, що характеризують як продуктивність заводу з випуску кожного з вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має у розпорядженні кожний із заводів для виробництва цих вузлів.

Таблиця 3.10

Початкові дані

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол/год.		
		Вузол 1	Вузол 2	Вузол 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Максимізувати випуск виробів.

3.2.2 (35, 1.5 бала) Підприємець має автозавод з такими характеристиками:

– потужність пресового обладнання забезпечує виготовлення або 100 кузовів вантажних машин, або 200 кузовів для легкових автомобілів, або будь-яку їх опуклу комбінацію;

– виробництво двигунів таке, що можна виготовити або 120 двигунів для вантажівок, або 100 двигунів для легкових автомобілів, або будь-яку їх опуклу комбінацію;

– збиральна діляниця може забезпечити збирання будь-якої кількості вантажівок і не більш ніж 90 легкових автомобілів;

– прибуток від виробництва однієї вантажівки складає 1500 грн. прибуток від виробництва одного легкового автомобіля – 1000 грн.

Скільки треба виготовити легкових автомобілів та вантажівок для максимізації сумарного прибутку?

3.2.3 (42, 1.5 бала) *Планування морських перевезень*. Існує n типів кораблів, які можуть здійснювати перевезення вантажів по m регулярних лініях. Кораблі різних типів при експлуатації на тій або іншій лінії мають різні характеристики. Виходячи з даних про собівартість вантажодіаметра та комерційного завантаження кожного типу корабля на кожній лінії, встановлені: величина a_{ij} – місячний обсяг перевезень вантажів одним судном j -го типу на i -й лінії та величина c_{ij} – місячні експлуатаційні витрати коштів на одне судно j -го типу, що використовується на i -й лінії.

Відомий також мінімальний обсяг перевезень a_i ($i=1, \dots, m$) по кожній лінії, що вимагається, а також кількість N_j ($j=1, \dots, n$) судів j -го типу.

Необхідно скласти такий план розподілу парку суден по m регулярних лініях, який забезпечив би мінімум сумарних експлуатаційних витрат при виконанні заданого обсягу перевезень.

3.2.4 (45, 1.5 бала) *Задача про розподілення (призначення)*. Існує деяка множина індивідуумів (машин, людей та ін.) n типів, яку треба розподілити для виконання деякої множини робіт m видів. Кількість індивідуумів типу i – a_i ($i=1, \dots, n$), кількість робіт виду j – b_j ($j=1, \dots, m$). Для кожного індивідуума типу i задана оцінка c_{ij} , яка визначає його ефективність при виконанні роботи виду j . Кожний індивідуум може бути призначений тільки на одну роботу. На кожну окрему роботу може бути розподілений тільки один індивідуум. Розподілити індивідууми між роботами таким чином, щоб виконати усю кількість робіт з максимальною ефективністю. При цьому показати: в якому випадку задача має розв'язок.

3.2.5 (104, 1.5 бала) *Задача про N-ський автозавод.* На автозаводі в місті *N* здійснюється збірка трьох автомобілів: DAEWOO Lanos, LADA 2110 і Mercedes SL600. Збиранням займаються три бригади (кожна з бригад може збирати кожен з трьох моделей автомобілів, що випускаються). Дані про те, скільки часу витрачає кожна бригада на збірку кожної моделі наведені в таблиці 3.11.

Таблиця 3.11

Дані до розрахунків

Бригада	Lanos	2110	SL600
1	5 год	4 г.	10 г.
2	4 г.	4 г.	6,5 г.
3	2,5 г.	5 г.	7,5 г.

На заводі встановлено восьмигодинний робочий день. Кожна бригада працює 25 днів на місяць.

Прибуток від реалізації одного автомобіля становить:

- DAEWOO Lanos'a – 2000 у.о.;
- LADA 2110 – 1700 у.о.;
- Mercedes SL600 – 14000 у.о.

Як скласти місячні завдання роботи бригадам, щоб прибуток заводу був максимальним, якщо відомо, що:

- попит на Mercedes не перевищує 5 шт. в місяць;
- сумарний попит на автомобілі Daewoo і LADA не перевищує 200 шт. в місяць.

3.2.6 (49, 1.5 бала) Фірма має чотири підприємства, причому кожне з них виробляє одну й ту ж саму продукцію. Витрати виробництва та вартість сировини для усіх підприємств різні. Існує п'ять оптових складів, де споживачі купують продукцію фірми, причому ціна на неї на кожному складі інша. Знайти оптимальний план виробництва та розподілення продукції, виходячи з даних, наведених відповідно у табл. 3.12 та у табл. 3.13.

Таблиця 3.12

Дані до розрахунків

Склад	1	2	3	4	5
Ціна продажу одиниці виробу	34	32	31	31	31
Максимальний обсяг збуту	180	110	150	100	150

Дані до розрахунків

	Підприємство (i)			
	1	2	3	4
Виробничі потужності підприємства (N_i)	150	200	175	100
Витрати виробництва (без урахування сировини) на од. продукції (p_i)	15	18	14	13
Вартість сировини на од. продукції (s_i)	10	9	12	8
Транспортні витрати на перевезення од. продукції на склад (c_{ij})				
1	3	9	5	4
2	1	7	4	5
3	5	8	3	6
4	7	3	8	2
5	3	5	6	7

3.2.7 (51, 1.5 бала) *Задача раціонального використання засівних площ.* Існує m земельних угідь S_1, S_2, \dots, S_m , призначених для засіву тією або іншою сільськогосподарською культурою. Ці площі відрізняються або положенням, або характером ґрунту. На кожному з угідь (полів) $S_i, i=1, \dots, m$, можуть бути розташовані одна або кілька з n сільськогосподарських культур Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Відома врожайність культури Q_j на полі S_i дорівнює a_{ij} центнерів з гектара. Площа поля S_i складає a_i гектарів. Відомі закупівельні ціни c_j на кожний вид Q_j продукції. Необхідно знайти план засіву засівних площ з метою максимізації доходу від продажу сільськогосподарської продукції.

3.2.8 (22, 1.5 бала) Завод виготовляє вироби трьох моделей (I, II, III). Для їх виготовлення використовується два види ресурсів (A і B), запаси яких складають 4000 і 6000 одиниць. Витрати ресурсів на один виріб кожної моделі наведено у табл. 3.14.

Витрати ресурсів на один виріб кожної моделі

Ресурс	Витрата на один виріб даної моделі		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

Трудовістість виготовлення виробу моделі I вдвічі більше, ніж виробу моделі II, та утричі більше, ніж виробу моделі III. Кількість робітників заводу дозволяє виробляти 1500 виробів моделі I. Аналіз умов збуту показує, що мінімальний попит на продукцію заводу складає 200, 200 та 150 виробів кожної моделі відповідно. Однак співвідношення випуску виробів повинно дорівнювати 3:2:5. Питомі прибутки від реалізації виробів моделей I, II, III складають 30, 20 та 50 грн. відповідно. Сформулюйте для даних умов задачу знаходження обсягів випуску виробів кожної моделі, при яких прибуток буде максимальним.

3.2.9 (29, 1.5 бала) Підприємство планує організувати виготовлення продукції n технологічними процесами. Виробництво одиниці продукції j -м процесом потребує витрат c_{ij} одиниць сировини i -го типу, $i=1, \dots, n$ (усі види продукції та сировини вважаються нескінченно подільними). Для купівлі сировини підприємство має в своєму розпорядженні гроші у кількості B . Нехай α_j – ринкова вартість одиниці продукції, виробленої j -м процесом, а ρ_i – вартість одиниці сировини i -го типу. Мета підприємства – виробництво продукції найбільшої вартості.

3.2.10 (106, 1.5 бала) *Задача о «Heroes of Might and Magic III»*. Студент III курсу Денис пристрасився до гри Heroes of Might and Magic III. І ось йому знадобилося набрати армію зі свого міста. Таблиця 3.15 відображає силу, вартість і доступна для найму кількість істот у місті Дениса:

Таблиця 3.15

Дані до розрахунків

Характеристики		Істоти						
		Титан	Нага	Джинн	Маг	Голем	Горгуля	Гремлин
Вартість істот	Золото	5000	1500	750	500	400	200	70
	Дорогоцінне каміння	3	2	1	1	0	0	0
	Ртуть	1	0	1	1	1	0	0
Сила		300	120	60	40	35	20	4
Доступна кількість істот		10	20	30	55	60	110	500

Денис має:

- 200000 золотих монет;
- 115 дорогоцінних камінь;

- 80 одиниць ртуті.

Він прагне максимізувати силу найнятої ним армії, але при цьому хоче, щоб загальна сила істот далекого бою (титанів, магів і гремлінів) була не меншою 4000 одиниць, а літаючих істот (джинів і горгуль) - не менше 2000. Необхідно також врахувати, що Денис може продати дорогоцінні камені на базарі за ціною 500 золотих монет за один камінь.

Сформулюйте математичну модель даної задачі.

3.2.11 (12, 1.5 бала) *Задача про завантаження обладнання.* У механічному цеху існує три металорізальних верстати: M_1, M_2, M_3 , які можуть виготовляти два типи деталей: D_1, D_2 . Час виготовлення деталей кожним з верстатів у годинах, ресурси часу верстатів та планові завдання вказані у табл. 3.16.

Розподілити завдання між верстатами так, щоб загальний час роботи всіх верстатів був мінімальним.

Таблиця 3.16

Час виготовлення деталей кожним з верстатів

	Д ₁ , год	Д ₂ , год	Ресурс часу
M₁	1 год	3 год	3000
M₂	2 год	4 год	2500
M₃	3 год	1 год	2800
Необхідна кількість деталей	100	500	

3.2.12 (13, 1.5 бала) *Задача про сплав.* Підприємство збирається виробляти сплав, до складу якого входять 30% металу M_1 , 30% металу M_2 і 40% металу M_3 . Можна купити початкові сплави (руди) A, B, \dots, E , склади і ціни яких наведені у табл. 3.17. Визначити такий набір початкових сплавів, при яких ми отримаємо потрібний сплав мінімальної вартості?

Таблиця 3.17

Склади і ціни початкових сплавів

	A	B	C	D	E	Необхідний сплав
M₁	0.1	0.1	0.4	0.6	0.3	0.3
M₂	0.1	0.3	0.5	0.3	0.3	0.3
M₃	0.8	0.6	0.1	0.1	0.4	0.4
Вартість 1 кг	4.1	4.3	5.8	6.0	7.6	

3.2.13 (19, 1.5 бала) *Задача про сплави.* Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку, олова використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих же

металів, які відрізняються складом і вартістю за 1 кг. Початкові дані наведені у табл. 3.18.

Таблиця 3.18

Початкові дані до розрахунків

Тип сплаву	Склад металу, %			Питома вартість, од.варт./кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	15	40	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

А. Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, який містить 20% свинцю, 30% цинку і 50% олова.

В. Розв'язати ту ж задачу при таких обмеженнях на склад сплаву: олова повинно бути від 40% до 60% і цинку – від 20% до 30%.

3.2.14 (110, 1.5 бала) Підприємство може випускати продукцію трьома технологічними способами виробництва (в кожен момент часу може використовуватися тільки один спосіб). При цьому за одну годину першим способом виробництва підприємство випускає 20 од. продукції, другим - 25 од. і третім - 30 од. продукції. Кількість виробничих факторів, які витрачаються за годину при різних способах виробництва, і наявні ресурси цих факторів представлені в таблиці 3.19.

Таблиця 3.19

Кількість виробничих факторів

Фактори Спосіб виробництва	Сировина	Верстатний парк	Робоча сила	Енергія	Транспорт	Інші витрати
1	2	3	7	2	1	4
2	1	4	3	1	0	2
3	3	2	4	3	1	1
Наявні ресурси факторів	60	80	70	50	40	50

Спланувати роботу підприємства для отримання максимуму продукції, якщо відомо, що за тиждень час роботи підприємства становить 40 год.

3.2.15 (111, 1.5 бала) Підприємство може працювати по п'яти технологічним процесам, причому в кожен момент часу може бути активним тільки один процес. Кількість одиниць продукції, що випускається різними технологічними процесами за одну од. часу відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. У процесі виробництва враховуються такі виробничі фактори: сировина, електроенергія, зарплата та накладні витрати. Витрати відповідних факторів при роботі з різними технологічними процесами протягом 1 од. часу вказані в таблиці 3.20. В останній графі таблиці 3.20 вказані обсяги ресурсів, якими володіє підприємство по кожному з виробничих факторів.

Таблиця 3.20

Витрати відповідних факторів

№ технологічного процесу	1	2	3	4	5	Ресурси
Виробничі фактори						
Сировина (кг)	12	15	10	12	11	1300
Електроенергія (кВт)	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	300
Зарплатня (тис. грн)	3	4	5	4	2	60
Накладні витрати (грн)	60	50	40	60	40	8000

Кількість продукції, випущеної процесами з парними номерами має дорівнювати кількості продукції, випущеної процесами з непарними номерами

Знайти програму максимального випуску продукції.

3.2.16 (114, 1.5 бала) Витрата газу в місті характеризується двома величинами: сумарні витрати в незимовий період (1500 млн. м³) і середньомісячні витрати за зимовий період (1000 млн. м³). Для задоволення потреб в газі необхідно побудувати кілька газосховищ. При цьому газосховища можуть бути одного з трьох типів: *I*, *II*, *III*. Для кожного з них відомі такі характеристики: a_i – обсяг газу, що постачається в незимових період (млн. м³) і b_i – обсяг газу, що постачається протягом одного місяця зимового періоду (млн. м³). Відомі капітальні витрати на будівництво кожного газосховища. Визначити

оптимальний план будівництва газосховищ, що забезпечує задоволення потреб в газі при мінімальних капіталовкладеннях, за даними, наведеними в таблиці 3.21.

Таблиця 3.21

Дані до розрахунків

Типи газосховищ	I	II	III
a_i – обсяг газу, що постачається в незимових період (млн. м ³) ($i = \overline{I, III}$)	50	100	50
b_i – обсяг газу, що постачається протягом одного місяця зимового періоду (млн. м ³) ($i = \overline{I, III}$)	20	30	10
c_i – необхідні питомі капіталовкладення (млн. од. вар.) ($i = \overline{I, III}$)	120	90	180

3.2.17 (115, 1.5 бала) Для контролю за роботою космічної ракети використовуються 4 види датчиків, які розміщені на ракеті. Результати вимірювань цих датчиків реєструються трьома типами наземних реєстраторів-самописців. Кожен датчик визначає одну з характеристик (температуру, тиск і т. д.) і передає результати по окремому каналу зв'язку на будь-який з самописців. У таблиці 3.22 вказані чисельність датчиків і самописців, а також час, що витрачається на включення відповідного каналу зв'язку.

Таблиця 3.22

Чисельність датчиків і самописців

Датчики \ Самописці	20	40	50	40
70	2	1	5	3
30	3	2	3	4
50	3	4	1	2

Визначити оптимальне закріплення датчиків до реєструючих пристроїв, при якому досягається мінімум сумарних витрат часу на включення каналів. (При цьому кожен датчик може передавати інформацію тільки на один самописець, а кожен самописець може приймати інформацію тільки від одного датчика).

3.2.18 (119, 1.5 бала) 2 задачі в 1. Обробка деталей A , B та C може проводитися на трьох верстатах (1, 2, 3). У наступній таблиці 3.23. вказані норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, продажна ціна одиниці деталі (в руб.), вартість 1 год роботи верстата і граничний час роботи верстата.

Таблиця 3.23

Дані до розрахунків

Деталі Верстати	Норми часу			Вартість 1 год роботи верстату	Граничний час роботи верстата
	A	B	C		
1	0,2	0,1	0,05	30	40
2	0,6	0,3	0,2	10	60
3	0,2	0,1	0,4	20	30
Ціна	10	16	12		

Скласти математичну модель, визначивши оптимальну виробничу програму, припускаючи, що:

- задача 1), що будь-яка деталь може виготовлятися на будь-якому з верстатів і потрібно отримати максимум товарної продукції;
- задача 2) що кожна деталь при її виготовленні повинна послідовно оброблятися на кожному з верстатів і потрібно отримати максимум сумарного прибутку.

3.2.19 (20, 1.8 бала) Три механізми: I, II і III можуть виконувати три види земляних робіт: A, B і C. У табл. 3.24 подані ресурси робочого часу кожного механізму, продуктивність механізмів при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи механізму.

A. Визначити навантаження механізмів при максимальному сумарному обсязі виконаних робіт.

B. Знайти оптимальне завантаження обладнання, що мінімізує сумарні витрати, при обсязі робіт $a=6000 \text{ м}^3$, $b=50000 \text{ м}^3$, $c=8000 \text{ м}^3$.

C. Визначити завантаження обладнання, яке забезпечує максимальний обсяг робіт при дотриманні вимоги $a:b:c=1:2:3$.

Таблиця 3.24

Ресурси робочого часу кожного механізму

Механізми	Продуктивність, $\text{м}^2/\text{год}$			Питома вартість, од.ст./год			Ресурс часу
	A	B	C	A	B	C	
I	30	20	40	2	4	3	400
II	60	30	50	3	2	5	300
III	60	40	20	5	3	6	280

3.2.20 (120, 1.8 бала) *Задача о коробках.* Продавець на книжковому ринку «Петрівка» Федір Остапович поїхав в місто N на оптовий книжковий ринок, де за низькими цінами купив багато товару:

- 100 книг «Самоучитель роботи на комп'ютері»;
- 200 запаяних пакунків по 3 зошити на 96 аркушів;
- 400 запаяних пакунків по 5 блокнотів.

Для транспортування товару до Києва Федір використовує б/у коробки з-під клавіатур R-key, які він може придбати за низькими цінами. Висота коробки не дозволяє покласти в неї товар один на інший (тобто вони укладаються в коробку в один шар). Ширина і довжина коробки становлять 18 см і 70 см відповідно. Ширина і довжина предметів, що вкладаються відповідно рівні:

- пакунок блокнотів – 9 см и 20 см;
- книга – 16 см и 28 см;
- пакунок зошитів – 18 см и 25 см.

Федору Остаповичу необхідно так розкласти товар по коробках, щоб використати якомога менше коробок.

Сформулюйте задачу як ЗЦЛП.

3.2.21 (121, 1.8 бала) Галактична Імперія вирішила збудувати Зірку Смерті, щоб раз і назавжди покінчити з Повстанським Альянсом. Для виготовлення Зірки Смерті необхідно задіяти чотири типи модулів. Їх кількості наведені в таблиці 3.25.

Таблиця 3.25

Типи модулів

Тип модуля	DS1	DS2	DS3	DS4
Кількість (шт.)	40	50	30	100

Заводи, які можуть виготовляти ці модулі для Зірки Смерті, розміщуються на двох планетах – Коррібан і Татуїн.

Оскільки на даних планетах ніколи не чули про нормований робочий день, то варто навести кількість місяців, протягом яких здатна працювати планета (якщо перевищити, то на планеті почнеться бунт). Ця кількість наведені в таблиці 3.26.

Таблиця 3.26

Кількість місяців

Планета	Кількість (міс.)
Коррібан	18
Татуїн	28

В один момент часу кожна планета може виготовляти тільки один тип модуля. При цьому кількість модулів кожного типу, які кожна планета здатна випустити за один місяць роботи, наведена в таблиці 3.27.

Таблиця 3.27

Кількість модулів

	DS1	DS2	DS3	DS4
Коррібан	8	9	4	7
Татуїн	9	5	8	6

Кількість імперських кредитів, які будуть витрачені на виготовлення модулів, задається таблицею 3.28.

Таблиця 3.28

Кількість імперських кредитів

	DS1	DS2	DS3	DS4
Коррібан	4000	2400	5000	2000
Татуїн	3000	5000	3500	2100

Імператор хоче, щоб ви розподілили виготовлення модулів по планетах, щоб сумарні витрати при побудові Зірки Смерті були мінімальні.

3.2.22 (116, 1.8 бала) Тканина трьох артикулів виробляється на ткацьких верстатах двох типів з різною продуктивністю (тканину кожного з артикулів може виготовлятися на кожному з верстатів). Для виготовлення тканини використовується пряжа і барвники. У таблиці 3.29 вказані потужності верстатів (в тис. верстато-год), ресурси пряжі і барвників (в тис. кг), продуктивності верстатів по кожному виду пряжі (в метр / год), добові норми витрат пряжі і фарби (в кг на 1000 м) і ціна (в грн.) 1 м тканини.

Таблиця 3.29

Дані до розрахунків

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Продуктивність і норми витрат на тканину		
		артикулу 1	артикулу 2	артикулу 3
Верстати 1 типа	300	20	10	25
Верстати 2 типа	450	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Барвники	1	10	5	8
Ціна		15	18	20

3.2.23 (112, 1.8 бала) Підприємство випускає два продукти ($k = A, B$) для задоволення попиту b_{kj} , який змінюється по півріччях ($j = I, II$). Ці дані наведені в таблиці 3.30.

Таблиця 3.30

Дані до розрахунків

Продукт (k)	Мінімальний попит на продукцію в півріччі j (b_{kj})	
	I	II
A	20	30
B	30	40

Виготовлення продуктів може проводитися на трьох машинах ($i = 1, 2, 3$), для яких відомий час t_{ki} , що витрачається i -й машиною на виробництво одиниці k -го продукту. Ці дані наведені в таблиці 3.31.

Таблиця 3.31

Дані до розрахунків

Продукт k	Час t_{ki} виготовлення продукту k машиною i		
	1	2	3
A	2	2	4
B	1	3	2
		4	2

Сумарний резерв часу a_{ij} , що є в розпорядженні i -ї машина в j -му півріччі наведений в таблиці 3.32.

Дані до розрахунків

Машина i	Резерв часу a_{ij} машини i у півріччі j	
	I	II
1	70	80
2	100	60
3	120	100

Відомі також величини прибутку від виробництва продуктів кожного виду, що наведені в таблиці 3.33.

Таблиця 3.33

Продукт (k)	Прибуток c_k від виробництва одиниці продукту k
A	3
B	2

Визначити оптимальну виробничу програму за умови максимізації сумарного прибутку.

3.3 Задачі категорії B

3.3.1 (23, 2 бала) *Задача про інвестиції*. Кошти можуть бути використані для фінансування двох проектів. Проект A гарантує отримання прибутку у розмірі α доларів на кожний вкладений долар через рік. Проект B гарантує отримання прибутку у розмірі β ($\beta > \alpha$) доларів на кожний інвестований долар, але через два роки. Як треба розпорядитися капіталом у 100000 дол., щоб максимізувати сумарний розмір прибутку, який можна отримати через 3 роки після вкладення інвестицій? Сформулювати цю задачу як задачу лінійного програмування. При цьому вважати, що суми, отримані у кінці першого та другого років:

- а) можна використати для подальшого капіталовкладення;
- б) не можна використати для подальшого капіталовкладення.

3.3.2 (28, 2 бала) *Задача про виробництво верстатів*. Відомо, що промисловість може виробляти n різних типів верстатів. Нехай b_k , $k=1, \dots, n$ – необхідність у кожному з цих типів. Верстат типу k може також виконувати

роботу верстата типу $k+1$ та усіх наступних типів. Задано функцію вартості $f_k(x)$ виготовлення x верстатів типу k .

Необхідно знайти, які типи верстатів і в якій кількості необхідно виготовляти, щоб задовольнити задану потребу при найменшій сумі витрат на виробництво верстатів.

3.3.3 (32, 2 бала) Розглянути задачу розподілу літаків трьох типів за 4-ма маршрутами. Середній пасажиропотік за добу за маршрутами 1, 2, 3 та 4 складає $П1$, $П2$, $П3$ та $П4$ чоловік відповідно. Характеристика парку літаків наведена у табл. 3.34.

Таблиця 3.34

Характеристика парку літаків

Тип літака	Місткість (кількість пасажирів)	Кількість літаків
1	50	5
2	30	8
3	20	10

Вартісні характеристики авіап перевезень наведені у табл. 3.35.

Таблиця 3.35

Вартісні характеристики авіап перевезень

Тип літака	Експлуатаційні витрати на 1 рейс за даним маршрутом, од. вартості			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Збитки від незадоволеного попиту	40	50	45	70

Сформулювати задачу, в якій вимагається мінімізувати суму експлуатаційних витрат і збитків через незадоволений попит.

3.3.4 (33, 2 бала) *Задача транспортного обслуговування.* У невеликому населеному пункті A існує підприємство $П$. Місце проживання n його робітників знаходиться поза населеним пунктом, внаслідок чого необхідно організувати їх доставку на роботу автобусами. Існує 2 основні автобусних зупинки: B і C (B знаходиться між A та C). Кількість робітників, яких потрібно доставити до підприємства на автобусі, дорівнює n_C на зупинці C та n_B – на зупинці B .

Транспортне агентство, яке обслуговує цю місцевість, має два типи автобусів: на 35 та на 50 місць. Агентством встановлені такі ціни на оренду автобусів для кожного з відрізків шляху залежно від типу автобуса. Початкові дані наведені у табл. 3.36.

Таблиця 3.36

Початкові дані до розрахунків

Відрізок шляху	Вартість оренди автобуса, од. вартості	
	на 35 місць	на 50 місць
BA	39	50
CA	54	68
CB	45	57

(Ціни не пропорційні відстані: це обумовлено постійними витратами транспортного агентства, які, як правило, перевищують змінні витрати).

Необхідно знайти, якого типу автобуси треба використовувати на кожному відрізку шляху, щоб сумарні витрати підприємства по перевезенню робітників були мінімальні.

3.3.5 (41, 2 бала) *Спеціалізація підприємств*. Один з видів кінцевої продукції, що виготовляється галуззю, комплектується з 3-х видів виробів. Кількість виробів кожного виду, яка входить у комплект готової продукції, задано. Крім того, відома місячна продуктивність кожного типу підприємств по випуску виробів кожного виду. Необхідно оптимально розподілити випуск виробів за підприємствами, тобто знайти спеціалізацію підприємства з тим, щоб забезпечити максимальний випуск комплектної продукції. Початкові дані наведені у табл. 3.37.

Таблиця 3.37

Початкові дані до розрахунків

Номер виробу	Тип підприємства (місячна продуктивність)					Кількість виробів у комплекті, N_i
	1	2	3	4	5	
1	100	400	20	200	600	3
2	15	200	30	50	250	1
3	—	150	15	—	400	2
Кількість підприємств	5	3	40	9	2	—

3.3.6 (44, 2 бала) Укладання контрактів. Відомство заготівель має кілька складів, розташованих у 8 містах. Нижче у табл. 3.38 наведені необхідні на кожному складі кількості упаковок деякого товару.

Таблиця 3.38

Кількості упаковок товару на кожному складі

Розташування складу	Необхідна кількість упаковок, шт	
	для внутрішніх потреб	на експорт
Колумбус	10000	
Річмонд	12000	
Сан-Антоніо	10000	
Скенектаді	9000	40000
Юта	3000	
Шарп	5000	
Обурн	4000	
Атланта	10000	10000
Всього	63000	50000

Чотири постачальники зробили свої пропозиції даного товару. Початкові дані наведені у табл. 3.39.

Таблиця 3.39

Початкові дані до розрахунків

Постачальники	Мінімально запропонована кількість товару		Максимально запропонована кількість товару	
	для внутр. потреб	на експорт	для внутр. потреб	на експорт
Постачальник 1	1000	—	10000	42000
Постачальник 2	—	—	40000	—
Постачальник 3	1000	—	10000	—
Постачальник 4	—	2000	10000	10000

Ціни однієї упаковки товару (враховуючи витрати на доставку) для кожної пари “постачальник-склад” наведені у табл. 3.40.

Ціни однієї упаковки товару

Склад	Постачальник 1		Постачальник 2	Постачальник 3	Постачальник 4	
	для внутр. потреб	на експорт			для внутр. потреб	на експорт
Колумбус	4	—	2	3	2	—
Річмонд	3	—	1	4	2	—
Сан-Антоню	2	—	3	3	4	—
Скенектаді	3	5	4	6	4	6
Юта	2	—	5	4	3	—
Шарп	3	—	6	7	6	—
Обурн	5	—	7	8	4	—
Атланта	3	4	5	6	6	8

Мінімізувати загальні витрати відомства заготівель.

3.3.7 (46, 2 бала) *Планування виробництва*. Підприємець знає, що йому необхідно виготовити r_i ($i=1, \dots, n$) одиниць деякого товару упродовж найближчих n місяців. Ця кількість товару може виготовлятися або регулярно, не більше a_i одиниць товару у місяць, або форсовано, не більше b_i одиниць товару. Вартість виготовлення однієї одиниці товару в i -му місяці дорівнює c_i при регулярному та d_i – при форсованому способі виробництва. У зв'язку з коливаннями вартості з плином часу, а також з огляду на обмеженість можливостей виготовлення, може статися, що буде більш економічно виготовляти товар про запас, до того, як він насправді знадобиться. Вартість зберігання одиниці товару протягом i -го місяця дорівнює s_i . Спланувати виробництво таким чином, щоб мінімізувати загальну суму витрат на виготовлення та зберігання.

3.3.8 (47, 2 бала) *Згладжуюча схема виробництва*. Виробник деякого продукту повинен спланувати своє виробництво на найближчі n місяців. Потреба за місяцями у його продукті становить r_i ($i=1, \dots, n$). Він може задовольнити замовлення, виготовляючи або необхідну кількість продукту, або тільки частину його, а нестачу поповнюючи за рахунок залишків продукції, виготовленої у попередні місяці. Вартість виробництва та зберігання одиниці продукції в i -й місяць складає c_i та s_i одиниць вартості відповідно. Спланувати виробництво

таким чином, щоб мінімізувати суму витрат, викликаних флуктуаціями випуску та зберіганням.

3.3.9 (48, 2 бала) *Задача про склад*. Підприємець займається купівлею та продажем одних і тих же виробів. Його базою є склад, що вміщує 500 таких виробів. Щомісяця він може продати будь-яку кількість виробів, але таку, що не перевищує запасу на початок місяця. Щомісяця він може закуповувати будь-яку кількість виробів, яку він має намір поставити у кінці цього місяця (або наступних місяців), але за умови, що складський запас не перевищить 500 виробів. На наступні 6 місяців існує такий прогноз витрат та цін продажу, які наведені у табл. 3.41.

Таблиця 3.41

Прогноз витрат та цін продажу

Місяць i	1	2	3	4	5	6
Витрати на придбання од. вир. c_i	27	24	26	28	22	21
Ціна продажу p_i	28	25	25	27	23	23

Якщо поточний запас складає 200 виробів, то яка оптимальна стратегія у цей період? (Вказівка: Використати такі змінні: x_i – кількість виробів, що закуплено у місяці i , y_i – кількість виробів, що продано у місяці i).

3.3.10 (113, 2 бала) Тваринницька ферма складає раціон годування корів на зиму, для цього вона використовує два види інгредієнтів: кукурудзяний силос і кормові трави. Є два науково розроблених раціони A та B і довільний раціон C , склади яких наведені в таблиці 3.42.

Таблиця 3.42

Склади раціонів

Раціон A	Не менше 40% кукурудзяного силосу, не більше 40% кормових трав
Раціон B	Не менш 30% кукурудзяного силосу, не більше 50% кормових трав
Раціон C	Без обмежень на склад

На основі вироблених заготівок кормів запропоновано такі граничні норми витрат кожного інгредієнта: кукурудзяного силосу – 200 ц, кормових трав – 300 ц.

Яку кількість кожного з раціонів повинна використати ферма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо:

- при раціоні *A* вона становить 10 од. вар. / ц;
- при раціоні *B* – 12 од. вар. / ц;
- при довільному раціоні *C* – 5 од. вар. /ц.

3.3.11 (118, 2 бала) Механічний завод виробляє три типи деталей. Кожну деталь послідовно обробляють на токарному, фрезерному і стругальному верстатах. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами. У таблиці 3.43 вказані ресурси (у верстато-год.) кожної групи верстатів, норми витрат часу при обробці деталі на відповідному верстаті по даному технологічному способу і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду.

Таблиця 3.43

Дані до розрахунків

Деталі		1			2			3			Ресурси часу
Технологічні способи		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Верстати	Токарний	0,4	0,9	0,8	0,5	0,3	0,4	0,7	0,6	0,9	250
	Фрезерний	0,5	0,4	0,7	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	0,7	450
	Стругальний	0,3	0,5	0,6	0,4	1,5	0,3	0,8	1,0	0,5	600
Прибуток		12			18			30			

Максимізувати сумарний прибуток.

3.3.12 (117, 2 бала) На чотири енергетичні установи поставляється вугілля трьох сортів. Причому, обсяги поставок кожного сорту складають 25%, 60%, 15% від загального.

Задані:

- теплотворні здатності кожного з сортів палива (в ккал / кг) 2800, 3000, 3500;
- потреби (мінімальні обсяги енергоспоживання) установ (в млн. ккал): 10, 25, 15, 30;
- витрати на закупівлю 1 т кожного сорту вугілля (в од. вартості): 8, 10, 15.

Визначити обсяги закупівлі та розподіл різних сортів вугілля між енергетичними установами при умові мінімізації сумарних витрат.

3.3.13 (18, 2 бала) *Задача про розкрій*. На підприємство поступили дві партії фанери, причому перша партія вміщує 400 листів, а друга – 250 листів. З них виготовляються комплекти, які включають 4 деталі 1-го типу, 3 деталі 2-го типу і 2 деталі 3-го типу. Один лист фанери першої партії може розкроюватися трьома способами: $R1$, $R2$ і $R3$, а один лист фанери другої партії може розкроюватися чотирма способами: $K1$, $K2$, $K3$ і $K4$. Кількість деталей кожного типу, яку ми отримуємо при розкрою одного листа тим чи іншим способом, наведена у табл. 3.44. Потрібно розкрити матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимальної кількості комплектів.

Таблиця 3.44

Кількість деталей кожного типу

Тип деталі	Кількість деталей, шт						
	Перша партія			Друга партія			
	$R1$	$R2$	$R3$	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$
1	0	6	9	6	5	4	0
2	5	3	4	5	3	2	6
3	12	14	0	7	4	5	7

3.3.14 (130, 2 бала) *Задача про автоперевезення*. Для обслуговування автомобільних перевезень при утилізації застарілих вибухових речовин в j -й день тижня потрібно a_j - автомашин.

Машини орендуються на автобазі, при цьому вартість оформлення оренди становить 50 од. вартості (за 1 машину).

Після поїздки машина або повертається на автобазу, або відправляється на проходження обов'язкового профілактичного ремонту. Звичайний ремонт триває 4 дні при витратах 20 од. вартості на машину, терміновий ремонт триває 2 дні при витратах 30 од. вартості на машину. Якщо машина відправляється на базу, то при наступній її оренді витрати на оформлення оренди становить ті ж 50 од. вартості.

Визначити оптимальну тижневу програму використання машин, що мінімізувала б сумарні витрати на оренду, звичайний і терміновий ремонт, якщо потреби в машинах характеризуються даними, що задаються у таблиці 3.45.

Дані до розрахунків

Дні тижня, j	1	2	3	4	5	6	7
a_j	50	40	70	60	80	40	50

3.3.15 (131, 2 бала) На початок планованого періоду фермер має 2 т. пшениці.

Він може продати частину пшениці і посіяти залишок. При цьому урожай складає 20 ц на кожні посіяні 10 кг.

Крім того, відомі ціни, за якими він може продати центнер пшениці за 4 послідовних роки (7, 8, 10 і 6 од. вартості.).

Визначити оптимальну стратегію посіву та продажу пшениці на зазначені 4 роки, при якій буде досягнутий максимальний прибуток.

Побудувати модель при додатковій умові: в 4-му році фермеру потрібно посіяти не менше 5 т. пшениці.

3.3.16 (132, 2 бала) З чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) складають три види сплавів латуні:

- звичайний,
- спеціальний;
- для художніх виробів.

Ціни одиниці ваги міді, цинку, свинцю і нікелю становлять 0,8 грн., 0,6 грн., 0,4 грн. і 1,0 грн., а одиниці ваги сплавів, відповідно, 2 грн., 3 грн., 4 грн.

При цьому:

- сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6% нікелю, не менше 50% міді і не більше 30% свинцю;
- спеціальний сплав - не менше 4% нікелю, не менше 70% міді, не менше 10% цинку і не більше 20% свинцю;
- у звичайний сплав компоненти можуть входити без обмежень.

Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати (за певний термін):

- не більше 400 од. ваги звичайного сплаву;
- не більше 700 од. ваги спеціального сплаву;

- не більше 100 од. ваги сплаву для художніх виробів.

Знайти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

3.3.17 (133, 2 бала) Деяке підприємство уклало договори на поставку своєї продукції на чотири наступні квартали, дивись таблицю 3.46.

Таблиця 3.46

Дані до розрахунків

Квартал i	1	2	3	4
Попит на продукцію b_i	120	120	200	140

Відомі обсяги випуску продукції при нормальному режимі роботи, дивись таблицю 3.47.

Таблиця 3.47

Відомі обсяги випуску продукції при нормальному режимі роботи

Квартал i	1	2	3	4
Випуск при нормальному режимі роботи a_i	100	80	120	100

Для задоволення попиту крім нормального режиму роботи, можуть використовуватися понаднормові роботи в обсязі, що не перевищує 25% обсягу випуску продукції при нормальному режимі роботи. Крім того, надлишок продукції в даному кварталі може зберігатися у вигляді запасів. Дані про витрати наведені в таблиці 3.48.

Таблиця 3.48

Дані про витрати

Витрати на одиницю продукції		
Робота в норм. режимі	Понаднормові роботи	Зберігання
5	8	3

Визначити оптимальний режим роботи підприємства, що задовольняє попит з мінімальними витратами за умов, що початковий і кінцевий запаси продукції дорівнюють 0.

3.3.18 (134, 2 бала) Напівфабрикати надходять на підприємство у вигляді листів фанери. Всього є дві партії матеріалу, причому перша партія містить 400 аркушів, а друга - 250 листів фанери.

З надходять листів фанери необхідно виготовити комплекти, що включають:

- 4 деталі 1-го типу;
- 3 деталі 2-го типу;
- 2 деталі 3-го типу.

Лист фанери кожної партії може розкроюватися різними способами. Кількість деталей кожного типу, яка виходить при розкрою одного листа відповідної партії з того чи іншого способу розкрою, представлено в таблиці 3.49.

Таблиця 3.49

Кількість деталей кожного типу

Перша партія				Друга партія		
Деталі \ Спосіб розкрою	Спосіб розкрою			Деталі \ Спосіб розкрою	Спосіб розкрою	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Потрібно розкроїти матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів.

3.3.19 (135, 2 бала) Маємо m пунктів відправлення, в кожному з яких зосереджено певну кількість одиниць однорідного продукту, призначеного до відправки: в i -му пункті є a_i одиниць продукту ($i=1, \dots, m$).

Цей продукт слід доставити в n пунктів призначення (споживання), причому в j -й пункт призначення потрібно доставити b_j одиниць продукту, $j=1, \dots, n$.

Кожен пункт відправлення з'єднаний з кожним пунктом призначення деяким маршрутом (число таких маршрутів $m \times n$). Відома вартість c_{ij} перевезення однієї одиниці продукту з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення.

Вартість перевезення по будь-якому маршруту складається з двох частин:

- перша складова пропорційна кількості перевезеного продукту;
- друга складова - фіксована плата за використання маршруту, вона дорівнює величині d_{ij} , виплачується тільки в тому випадку, якщо перевезення по

даному маршруту здійснюється і не залежить від обсягу продукції, що перевозиться.

Потрібно скласти план перевезень, що мінімізує загальну вартість перевезень.

3.3.20 (52, 2 бала) *Мережеві задачі*. Нехай дано транспортну мережу (трубопроводи, залізниці, телефонна мережа), по якій надсилають однорідні одиниці (нафта, машини, повідомлення) з деякої точки сітки, *пункту відправлення* 0 , у визначене місце, яке має назву *пункт призначення* n . Крім цих двох пунктів, мережа складається з багатьох проміжних вузлових пунктів, з'єднаних шляхами поміж собою та з даними двома пунктами. Ці вузлові пункти можна інтерпретувати як місця, в яких відбувається перехід з одного шляху на інший. Наприклад, як на рис. 3.1.

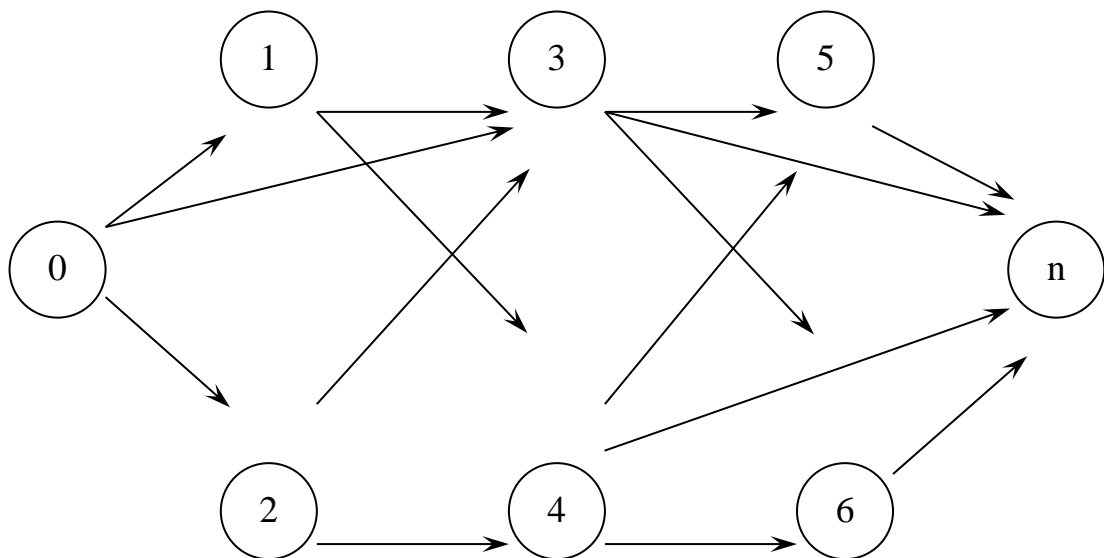


Рис. 3.1. Приклад інтерпретації місць, в яких відбувається перехід з одного шляху на інший

0 – пункт відправлення; n – пункт призначення; $1, 2, 3, \dots, 6$ – вузлові (проміжні) пункти; $(0, 1), (0, 2), \dots, (6, n)$, – шляхи.

Вздовж кожного шляху може пересуватися тільки кінцевий потік вантажів, причому цей рух відбувається у напрямку, вказаному стрілками. З кожним шляхом (i, j) ($i=0, \dots, n-1; j=1, \dots, n$) пов'язана верхня границя того потоку, який цей шлях може пропустити через себе, – його *пропускна здатність* f_{ij} (якщо шлях (ij) відсутній, то $f_{ij} = 0$). Потік деяких вантажів відправляється з пункту 0 та,

пересуваючись вздовж шляхів, потрапляє у проміжні вузлові пункти, потім рухається вздовж інших шляхів у інші вузлові пункти або у пункт призначення доти, поки усі вантажі, які почали свій шлях у пункті 0, не потраплять у пункт n . Іншими словами, на мережу накладено умову збереження потоку у проміжних вузлах: те, що потрапляє у такий вузол, повинно і вийти з нього.

3.3.21 (52.1, 2 бала) *Задача про максимальний потік.* Припускається, що у пункті 0 існує необмежений запас вантажів і що єдиною перешкодою для пересилання цих вантажів у пункт n є пропускна здатність шляхів. Знайти максимальний потік, який можна надіслати з пункту відправлення у пункт призначення.

3.3.22 (52.2, 2 бала) *Задача про потік мінімальної вартості.* З кожним шляхом (i, j) пов'язана вартість c_{ij} транспортування одиниці вантажу з пункту i у пункт j . Необхідно доставити визначену кількість F одиниць вантажу з пункту відправлення у пункт призначення. Припускається, що у вузлах виконується умова збереження потоку, і що потік вздовж шляху (i, j) обмежено величиною f_{ij} .

3.3.23 (52.3, 2 бала) *Задача про найкоротший шлях.* Нехай мережа – це карта доріг, пункт відправлення – місто, з якого відправляємося, пункт призначення – місто, куди нам необхідно потрапити, а c_{ij} – відстань між містами (вузловими пунктами). Знайти *найкоротший шлях* між пунктами відправлення та призначення.

3.4 Завдання до контрольної роботи

Побудувати математичні моделі задач, які вибираються з табл. 3.50 згідно з варіантом.

Таблиця 3.50

Варіанти завдань до контрольної роботи

№ варіанту	Номер задачі (кількість балів)						Додатково
1	3.1.1 (1)	3.2.11 (1.5)	3.2.17 (1.5)	3.2.5 (1.5)	3.3.1 (2)	3.3.14 (2)	3.2.18 (1.5)
2	3.1.11 (1.2)	3.2.10 (1.5)	3.2.6 (1.5)	3.2.16 (1.5)	3.2.19 (1.8)	3.3.11 (2)	3.2.9 (1.5)

№ варіанту	Номер задачі (кількість балів)						Додатково
<i>3</i>	3.1.2 (1)	3.2.12 (1.5)	3.2.8 (1.5)	3.2.7 (1.5)	3.3.2 (2)	3.3.15 (2)	3.2.17 (1.5)
<i>4</i>	3.1.12 (1.2)	3.2.9 (1.5)	3.2.18 (1.5)	3.2.8 (1.5)	3.2.22 (1.8)	3.3.8 (2)	3.2.10 (1.5)
<i>5</i>	3.1.3 (1)	3.2.1 (1.5)	3.2.2 (1.5)	3.2.4 (1.5)	3.3.3 (2)	3.3.16 (2)	3.2.16 (1.5)
<i>6</i>	3.1.13 (1.2)	3.2.8 (1.5)	3.2.11 (1.5)	3.2.12 (1.5)	3.2.23 (1.8)	3.3.6 (2)	3.2.15 (1.5)
<i>7</i>	3.1.4 (1)	3.2.13 (1.5)	3.2.3 (1.5)	3.2.1 (1.5)	3.3.4 (2)	3.3.17 (2)	3.2.17 (1.5)
<i>8</i>	3.1.14 (1.2)	3.2.7 (1.5)	3.2.10 (1.5)	3.2.9 (1.5)	3.3.5 (2)	3.3.2 (2)	3.2.11 (1.5)
<i>9</i>	3.1.5 (1)	3.2.14 (1.5)	3.2.4 (1.5)	3.2.15 (1.5)	3.3.6 (2)	3.3.18 (2)	3.2.13 (1.5)
<i>10</i>	3.1.15 (1.2)	3.2.6 (1.5)	3.2.16 (1.5)	3.2.3 (1.5)	3.2.21 (1.8)	3.3.9 (2)	3.2.9 (1.5)
<i>11</i>	3.1.6 (1)	3.2.15 (1.5)	3.2.7 (1.5)	3.2.14 (1.5)	3.3.7 (2)	3.3.19 (2)	3.2.10 (1.5)
<i>12</i>	3.1.16 (1.3)	3.2.5 (1.5)	3.2.9 (1.5)	3.2.2 (1.5)	3.2.19 (1.8)	3.3.10 (2)	3.2.18 (1.5)
<i>13</i>	3.1.7 (1)	3.2.16 (1.5)	3.2.1 (1.5)	3.2.10 (1.5)	3.3.8 (2)	3.3.20 (2)	3.2.17 (1.5)
<i>14</i>	3.1.17 (1.3)	3.2.4 (1.5)	3.2.14 (1.5)	3.2.11 (1.5)	3.2.20 (1.8)	3.3.3 (2)	3.2.12 (1.5)
<i>15</i>	3.1.8 (1)	3.2.17 (1.5)	3.2.15 (1.5)	3.2.13 (1.5)	3.3.9 (2)	3.3.21 (2)	3.2.14 (1.5)
<i>16</i>	3.1.18 (1.3)	3.2.3 (1.5)	3.2.5 (1.5)	3.2.6 (1.5)	3.2.21 (1.8)	3.3.7 (2)	3.2.11 (1.5)
<i>17</i>	3.1.9 (1)	3.2.18 (1.5)	3.2.12 (1.5)	3.2.16 (1.5)	3.3.10 (2)	3.3.22 (2)	3.2.9 (1.5)
<i>18</i>	3.1.4 (1)	3.2.2 (1.5)	3.2.13 (1.5)	3.2.15 (1.5)	3.3.11 (2)	3.3.5 (2)	3.2.8 (1.5)
<i>19</i>	3.1.10 (1.2)	3.2.1 (1.5)	3.2.6 (1.5)	3.2.18 (1.5)	3.3.12 (2)	3.3.23 (2)	3.2.10 (1.5)
<i>20</i>	3.1.14 (1.2)	3.2.4 (1.5)	3.2.17 (1.5)	3.2.7 (1.5)	3.3.13 (2)	3.3.1 (2)	3.2.15 (1.5)

ВИСНОВКИ

Метою дослідження операцій є визначення найкращого (оптимального) способу дій при вирішенні задач організаційного управління в умовах наявності обмежень, які мають техніко-економічний характер.

Практикум присвячений одному з основних етапів дослідження операцій - складанню економіко-математичних моделей проблемних ситуацій. Розглянуті питання, які повинні бути вирішені в процесі побудови математичної моделі.

Математичні моделі та методи займають центральне місце в дослідженні операцій.

Робота, що виконується в процесі операційного дослідження, складається з наступних етапів: ідентифікація проблеми, побудова моделі, вибір математичного методу, розв'язання поставленої задачі, перевірка адекватності моделі, реалізація результатів на практиці.

Посібник містить опис багатьох поширених на практиці проблемних ситуацій, що приводять до оптимізаційних моделей різних класів задач математичного програмування. На багатьох прикладах показано особливості побудови оптимізаційних моделей.

Також практикум містить завдання для домашньої роботи, модульної контрольної роботи та самостійної роботи, які розбиті на категорії з огляду на їх складність.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций [Текст] // М.: Мир, 1971. – 533 с.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. – 340 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3-х т. [Текст] // М.: Мир, 1973. – Т. 2. – 501 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. – 208 с.
5. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения) [Текст] // М.: Физматгиз, 1961. – 125 с.
6. Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций [Текст] / Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюття В.И. // К.: Вища шк., 1978. – 312 с.
7. Исследование операций: В 2-х т. Т. 1. Методологические основы и математические методы [Текст] /Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. // М.: Мир, 1981. – 712 с.
8. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование [Текст] // М. Высш. шк., 1967. – 428 с.
9. Кофман А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование [Текст] / Анри-Лабодер А. // М.: Мир, 1977. – 432 с.
10. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование [Текст] / Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. // К.: Вища шк., 1975. – 372 с.
11. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х т. [Текст] // М.: Мир, 1985. – Т. 1. – 325 с.